

First Passage Time for Random Walks in Heterogeneous Networks

임의 보행문제(Random walks)는 격자 상에서의 확산현상을 설명하는 가장 근본적인 모델로 통계 물리에서 가장 대표적인 동역학으로서 현재까지 많은 연구가 진행되어 왔다. 임의 보행문제에서 다루는 한 가지 중요한 물리량은 어떤 주어진 위치에 입자가 최초로 도달하는 평균시간이다. 이 시간은 아무런 편향(bias)없이 입자가 주어진 격자 상에서 움직일 때 얼마나 빠르게 퍼지는지에 대한 정보를 줄 뿐만 아니라 확산하는 입자들의 반응속도(reaction diffusion problem)나 인터넷 웹상에서 정보를 찾는 문제 등에 응용될 수 있다.

임의 보행 문제는 초기에 많은 연구가 유클리드 공간에서의 균일 격자(regular lattice)상에서의 성질에 집중되었고 80년대에 들어서면서 프랙탈(fractal) 격자와 비균일매체(disordered media)에서의 동역학이 중요해짐에 따라 그러한 격자 구조에서의 임의 보행문제가 많이 연구되었다. 일련의 연구를 통해 알게 된 사실은 임의 보행의 점근적인 스케일링 움직임(asymptotic scaling behavior)을 결정하는 중요한 요소가 스펙트럼 차원(spectral dimension) d_s 임을 알게 되었다. 예를 들어 $d_s=2$ 를 경계로 임의 보행은 일시성(transient, $d_s>2$)과 반복성(recurrent, $d_s<2$)을 지니는 마르코프 체인이 된다. 즉 d_s 의 값에 따라 임의 보행의 움직임이 크게 좌우된다.

많은 현실 세계 네트워크들이 비균질 척도 없는 네트워크임이 알려짐에 따라 이러한 격자 구조상에서의 임의 보행 문제를 이해할 필요성이 생기게 되었다. 척도 없는 네트워크는 연결선수가 $p_d(k) \sim k^{-\gamma}$ 와 같은 멱함수를 따르게 되는데 이러한 연결선수의 스케일링 특성은 스펙트럼 차원 d_s 에 의한 스케일링 특성과 서로 영향을 미치며 위에서 소개한 보편적인 현상들이 더 이상 적용되지 않게 된다. 가장 근본적인 이유는 위의 다른 격자 구조와는 다르게

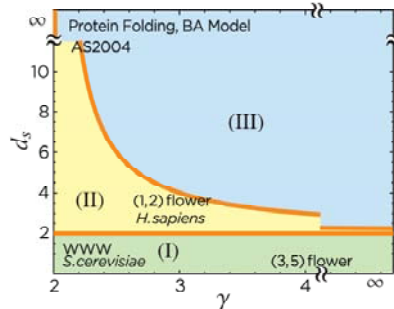


그림 1. 연결선수 분포 지수와 스펙트럼 차원에 따른 네트워크의 분류. (I), (II), (III) 각 영역에 있는 네트워크들은 다른 평균 최초 도달 시간의 스케일링을 보인다.

척도 없는 네트워크의 경우는 시스템의 크기가 무한히 커지는 극한에서 허브 노드의 연결선 수 또한 무한히 커지기 때문이다. 이 특징은 임의 보행문제에 적지 않은 영향을 주는데 특별히 허브 노드 근처에 있는 입자의 경우 허브 노드 근방에 오랫동안 머물러 있게 된다. 즉, 허브 노드는 트랩(trap)과 같은 역할을 하게 된다. 이러한 비균질 네트워크의 특이성이 우리 연구 그룹이 임의 보행에 의한 다양한 특성을 연구하게 된 계기가 되었다.

임의 보행에서 어떤 순간에 노드 i 에 있던 임의 보행자는 그 다음 단계에서 노드 i 의 k_i 개의 이웃들 중 하나를 $1/k_i$ 의 확률로 균등하게 선택하여 이동한다. 우리의 관심사는 얼마나 빠르게 임의 보행자가 미리 주어진 목표 노드 m 에 처음으로 도달하는지 아는 것이다. 이 목표 노드로의 보행이 얼마나 효과적인지(즉 얼마나 임의 보행자가 빨리 m 을 찾는지) 알기 위해 우리는 정상상태에서 출발한 노드가 목표 노드 m 에 최초로 도달하는 분포를 $F_m(t)$ 라고 하자.

$F_m(t)$ 은 되돌이 확률(return to origin probability)은 $R_m(t)$ 와 긴밀한 관계가 있는데, $R_m(t)$ 는 m 에서 출발한 임의 보행자가 t 단계 후에 다시 m 에 돌아올 확률을 의미한다.

우리는 이전 논문에서 $R_m(t)$ 의 움직

임을 연구하였는데, 한 가지 흥미로운 사실은 기존의 고전적인 격자에서는 스펙트럼 차원 d_s 에만 의존하는 $R_m(t)$ 가 초기 위치 m 의 연결선수에 따라 초반에는 $d_s^{(hub)}$ 라는 새로운 지수로 감소하다가 나중에는 d_s 를 지수로 하는 두 가지 멱함수 형태의 크로스오버를 보이는 것을 밝혀냈다. 즉, 연결선수가 크게 변하는 비균질 척도 없는 네트워크의 경우 확산 현상은 크게 변할 수 있다는 것이다.

$R_m(t)$ 과 $F_m(t)$ 의 관계를 이용하면, 평균 최초 도달시간 $T_m = \sum_t t F_m(t)$ 의 움직임을 계산할 수 있다.

평균 최초 도달 시간 T_m 은 연결선수 분포 지수 γ 와 스펙트럼 차원 d_s 에 대해서 세 가지 영역으로 분류된다. 첫 번째 영역은 $d_s < 2$ 인 영역인데 여기에서는 모든 노드가 연결선수에 관계없이 평균 최초 도달 시간이 동일하다. 반면에 두 번째와 세 번째 영역은 $d_s^{(hub)}=2$ 에 의해 나누어지고 연결선수에 따라서 다른 지수를 갖는 멱함수를 따르게 된다. 이 두 번째와 세 번째의 경우에는 연결선수가 많음에 따라서 평균 최초 도달시간이 짧아짐을 알 수 있다.

예를 들면, 월드 와이드 웹(World-Wide Web) 네트워크의 경우는 $d_s \approx 1.8$ 로 모든 목표노드의 평균 최초 도달 시간은 모두 같다. 즉, 허브 노드가 다른 노드에 비해 특별히 정보 제공에 큰 도움이 되지 않는다. 반면에 인터넷의 AS 시스템에서는 $d_s > 2$ 로 허브 노드가 가장 빠르게 임의 보행자에 의해 발견된다.

이러한 성질들은 일반적인 비균질 척도 없는 네트워크의 수송 현상의 효율성을 구분하는 것으로 월드 와이드 웹에서의 검색 엔진이나 인터넷에서의 패킷 수송 그리고 생물 시스템에서의 단백질 폴딩 네트워크 등에서의 수송현상에 응용될 수 있다.

황성민(서울대), 이택선(인하대), 강병남(서울대), Phys. Rev. Lett. 109, 088701 (2012).