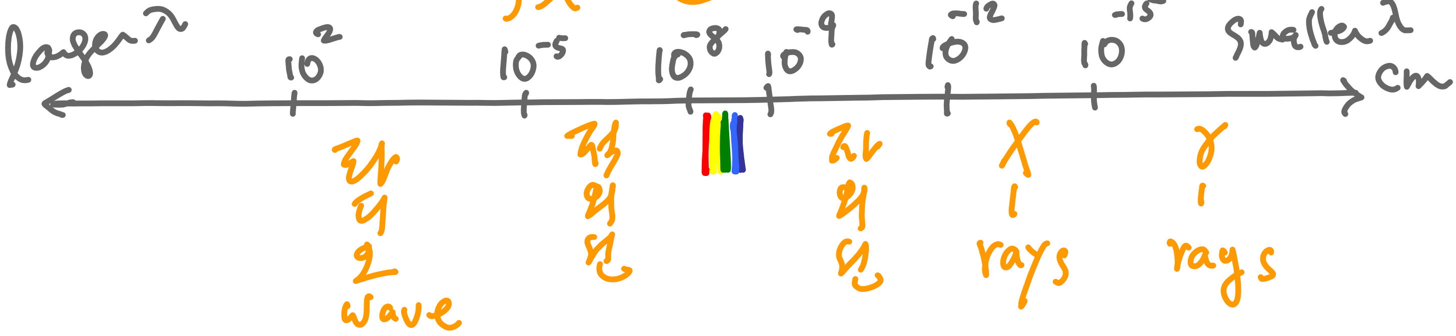
노트 제목 2007-03-04

AGP 10.05.28 time

Principle of least action

이제 전자파를 기술해 보자. 전자파는 Maxwell 방정식을 만족하는 $\vec{E}, \vec{B}$ field 의 파동으로서 파장 λ 에 따라 여러 가지로 불린다.

$$f\lambda = c$$



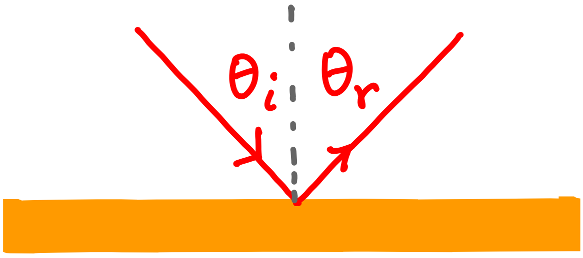
기하광학은 빛이 입자처럼 직진한다는 직선의 법칙을 가지고 기술하는 것으로서, lens 의 제작 등에 많이 이용된다. 그러나 이론은 전자파의 관점에서 이해된다. 단지 λ 가 빛이 통과하는 size 보다 아주 작을 때 유용하다.

어쨌든 기하광학의 원칙인 빛의 직진에 대해 살펴 보면.

⇒ history 에 중점을 두고, idea 의 발전

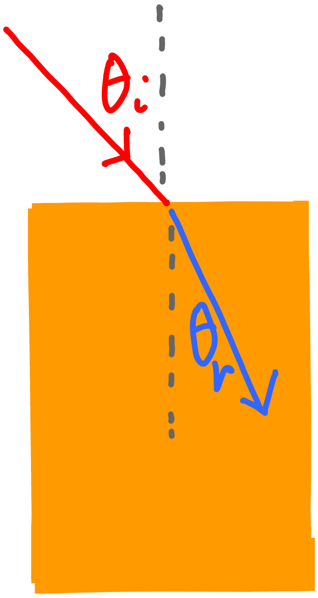
반사 및 굴절

reflection



입사각 = 반사각 $\theta_i = \theta_r$

refraction



입사각 > 굴절각

이 굴절각에 대한 그리스 학자들의 의문은 실험을 하게 했고 Alexandria 의 Ptolemy 는 AD 140 에 실험결과를

공기(θ_i)	물(θ_r)	Snell's law
10°	8°	7.5°
20°	15.5°	15°
30°	22.5°	22°
40°	29°	29°
50°	35°	35°
60°	40.5°	40.5°
70°	45.5°	45°
80°	50°	48°

이 예는, 그리스인들이 실험을 하지 않았다는 통념과는 다르다.

위의 측정은 1621년에 Snell에 의해 이뤄지게 되었다.

Snell's law : $\sin\theta_i = n \sin\theta_r$

굴절율

법칙을 이야기할 때는, "그냥 이 법이 맞다", 는 식이다. 그러나 과학(Science)은 "그 법칙이 자명하다" 고 이해되는 설명을 한다. ⟹ 이런 과정을 거치는 것에는 무턱대고 science를 붙이는 잘못된(?) 관행도 있다.

"인문과학" "사회과학"

누구나 받아들이는 공리 같은 것부터

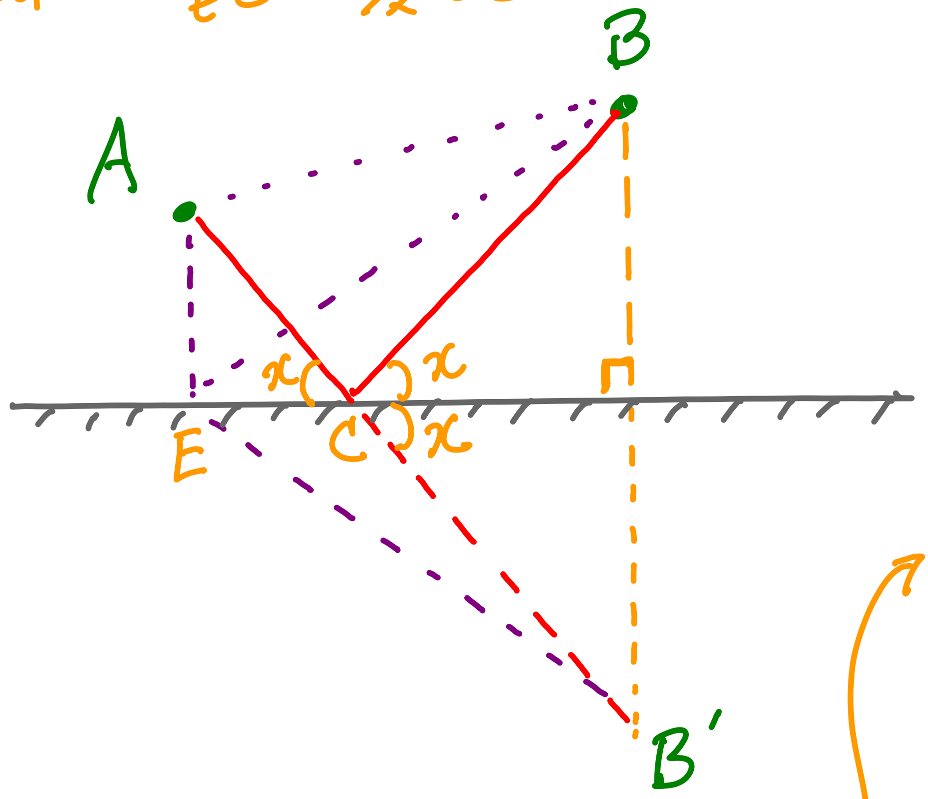
"왜 Snell의 법칙이 그렇게 되어야 하는가?" 에 대한 더 쉬운 설명으로 Fermat 는 "최소시간의 원칙"

[illegible]

을 들고 나온다. $\sin\theta_i = n \sin\theta_r$ 과 principle of least time 은 어떤 것이 더 원론적인가? 더 기본적인 원리로 보는가?

여기서 의문이 있을 수 있지만 어느 하나가 더 많은 현상을 설명하면? OK

이미 초등학교 때 부터 어떻게 반사 되는지, 또는 어떤 경우에서 반사 되는지 알고 있다.



A에서 거울에 한번 부딪히고 B에 도달 하는 최소의 거리는 C에서 반사되는것.

$\therefore$ 입사각 = 반사각

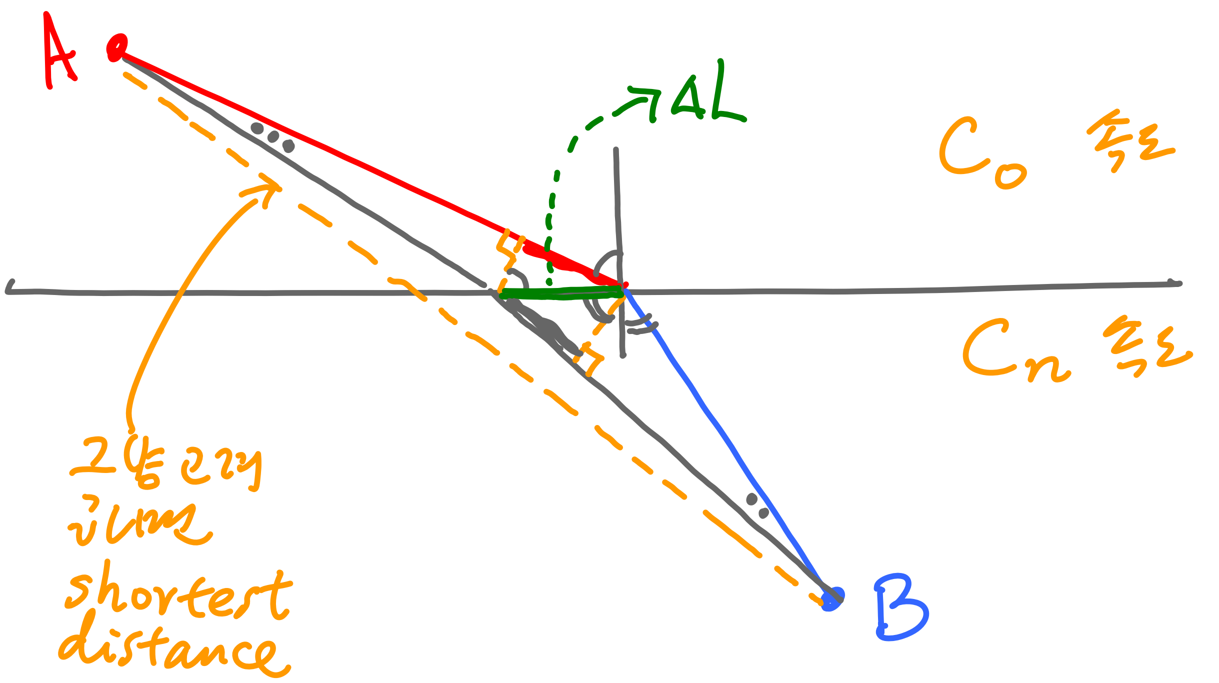
이 최소의 거리는 Alexandria의 Hero에 의해 이미 사용되었다.

그럼 Fermat는? 무언지 다른게, 그래서 다른 응용에 새로운 예측을 하도록

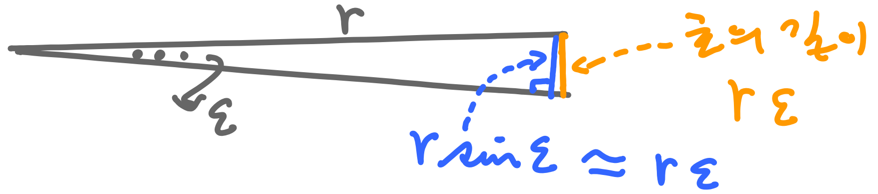
least distance $\Longrightarrow$ least time

distance를 바꾸어서 속도로 표현하다.

따라서 Fermat 는 근본적으로 빛의 속도가 공기와 물에서 다르다는 것을 가정하고 있다. 굴절률 n 에 관계



••• 와 •• 이 아주 작을 때 즉 실제 진행과 조금 벗어 났을 때



따라서 와 의 거리 비교.

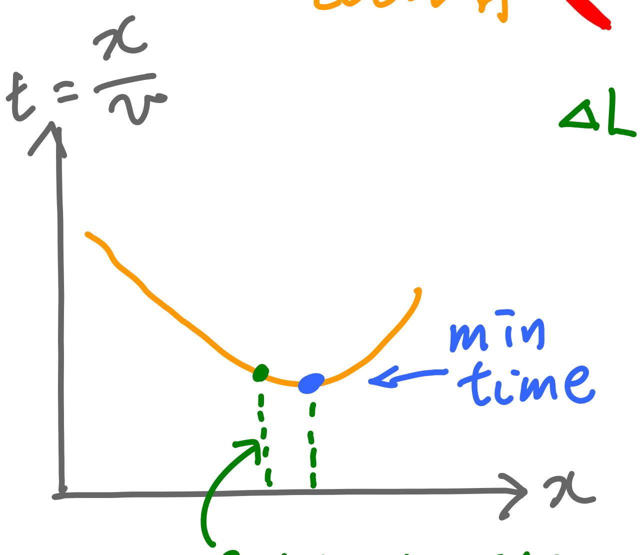
$$\Delta L \sin\theta_i \longleftrightarrow \Delta L \sin\theta_r$$

이것이 같으면 minimum
무엇이 같으면? 속 시간

$$\frac{\Delta L \sin\theta_i}{C_0} = \frac{\Delta L \sin\theta_r}{C_n}$$

$$\sin\theta_i = \frac{C_0}{C_n} \sin\theta_r$$

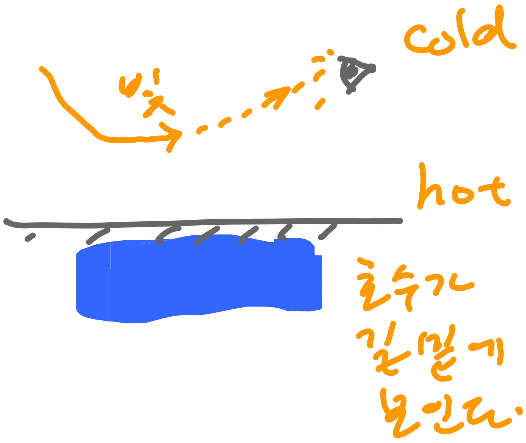
$$\sin\theta_i = n \sin\theta_r$$



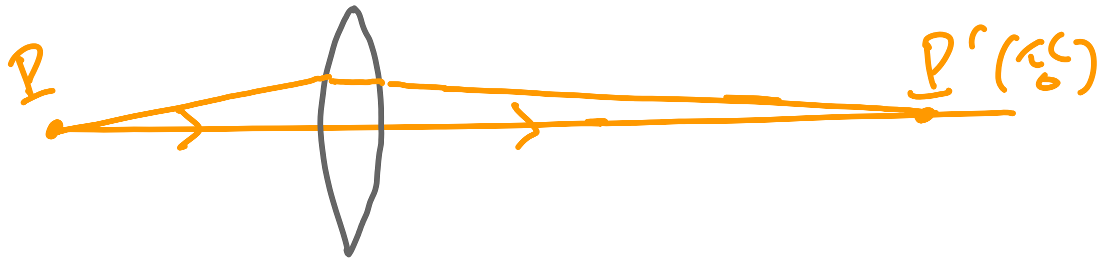
조금 벗어난 것은 Taylor expansion 의 1차항이 없다.

이 Fermat 의 원리는

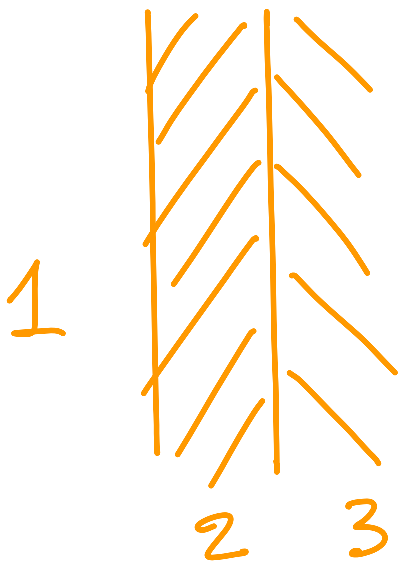
신기루 mirage



Lens



포물면경 (반사망원경)



13 사이의 굴절률은?

least distance 로서는

직접 13을 붙여서

재어도 같다,

principle of least time

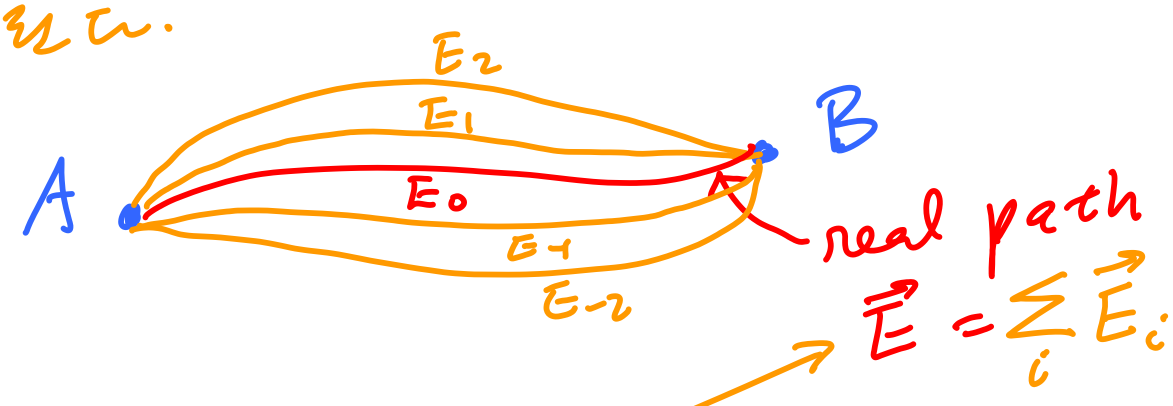
은 velocity 의 비로서

표시되면

$$n_{13} = \frac{v_1}{v_3} = \frac{v_1/v_2}{v_3/v_2} = \frac{n_{12}}{n_{32}}$$

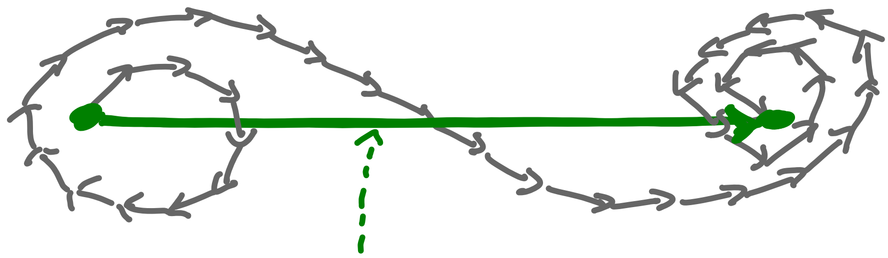
$$n_{ij} = \frac{n_i}{n_j}$$ (i→j 의 굴절율)

사실 빛은 전자파이므로 파동의 진행을 이뤄진다.



선형 system 이므로

phasor 로서 $\rho e^{i\theta}$ 로 ρ가 같다면 이 phasor vector들의 합은



모든 phasor 들의 합. 이 크기가 빛의 amplitude 이다.
이렇게 계산한 결과가
빛은 직진, 반사,
굴절 현상을 한다.

그러면 이것이 Fermat의 least time 보다 근원적?

그렇다면 Fermat가 설명 못한 것을 설명해야 할 것이다.

Principle of Least Action

We studied Newton's 2^{nd} Law !!
For example, in a conservative force field a particle moves according to

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$-\vec{\nabla} V$$

potential energy

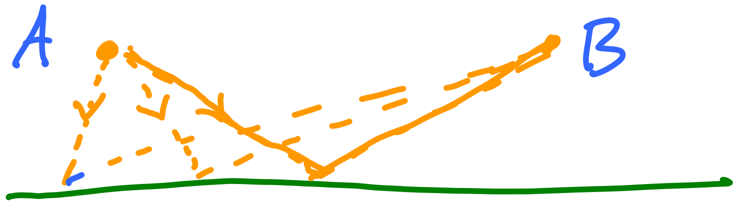
Feynman (Bronx High School) had a good physics teacher Mr. Bader "Story"

Feynman Lecture Vol II Chapt 19

"중력장에서 움직이는 물체를 생각해 보자"

뉴턴의 법칙은 vector : Energy는 scalar

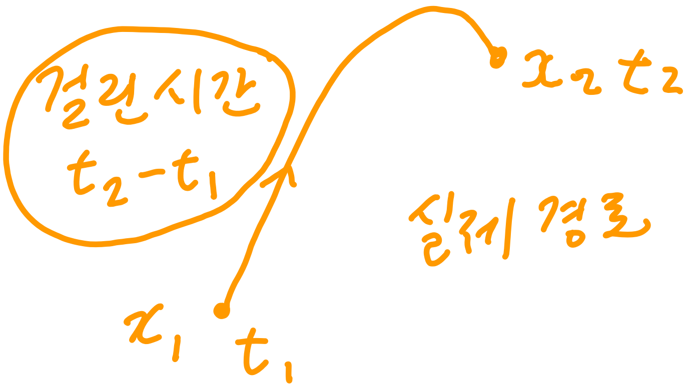
Idea :



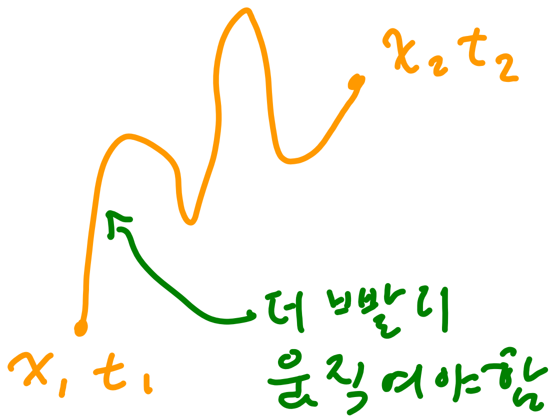
입사각 = 반사각으로 풀 수 있다.

그러나 Fermat는
"빛이 A→B로 가는데 최소한의 시간을 가지고 가는 경로는?" 의 답으로 문제를 바꾸었다.

"질점이 중력장에서 움직이는데 여러 경로를 생각해 보자"



"다른 경로를 똑같은 시간 t_2-t_1에 움직이는 경우는?"



"어떤 양이 최소가 되도록 요구할 것인가?"

KE, 그러나 각점에서 다 다르게

적분한 값?

Claim : $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}(KE-PE)\,dt$

So,

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - mgx \right] dt$$

$\rightarrow S[x(t)]$

calculate for each path $x(t)$
$\Rightarrow$ gives a number
$t_1, t_2 = \text{fixed}$

Calculate for (1D) $y \uparrow \rightarrow t$ 답: 포물선

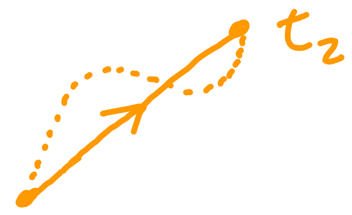
Example : No force

단지 $S = \int_{t_1}^{t_2} (KE)\, dt$ 계산

평균 운동에너지 $\overline{KE}$

$$S = (t_2 - t_1)\overline{KE}$$

만약 평균 운동에너지를 가지고 움직이면 등속운동



① $(t_2 - t_0)K_2 + (t_0 - t_1)K_1$
$\Rightarrow K_1 > K_2$
② $\overline{K}(t_2 - t_1)$

$$① - ② = t_2(K_2 - \overline{K}) - t_1(K_1 - \overline{K}) + t_0(K_1 - K_2)$$
$$= (t_2 + t_1)\overline{K} + t_0(K_1 - K_2) + t_2K_2 - t_1K_1$$

$t_0 = \frac{t_2 + t_1}{2}$ 으로 잡으면

$$① - ② = (t_2 + t_1)\overline{K} + \frac{t_2K_1 - t_2K_2 + t_1K_1 - t_1K_2 \; +2t_2K_2 - 2t_1K_1}{2}$$

$$+2t_2K_2 - 2t_1K_1$$

$$① - ② = (t_2+t_1)\bar{K} + \frac{t_2K_1 - t_2K_2 + t_1K_1 - t_1K_2}{2}$$

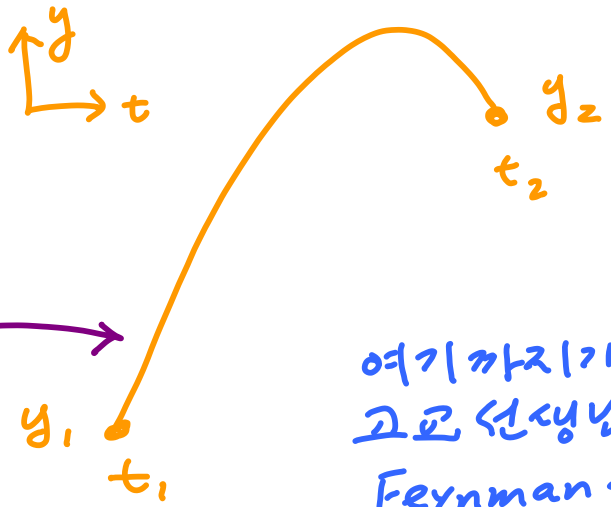
$$= (t_2+t_1)\bar{K} + \frac{1}{2}\left[t_2K_1 + t_2K_2 - t_1K_1 - t_1K_2\right]$$

$$K_1(t_2-t_1) + K_2(t_2-t_1)$$

$$= (t_2+t_1)\bar{K} + (t_2-t_1)\frac{K_1+K_2}{2} > 0$$

taking any t_0, we obtain larger S.

만약 중력장 내에서 움직이면



KE−PE

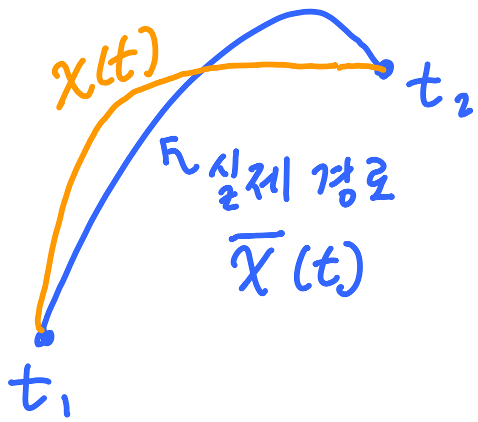
PE가 작을 때 빨리 목적지까지 도착해야 함.

⇓

큰KE ⇒ 빨리 움직임

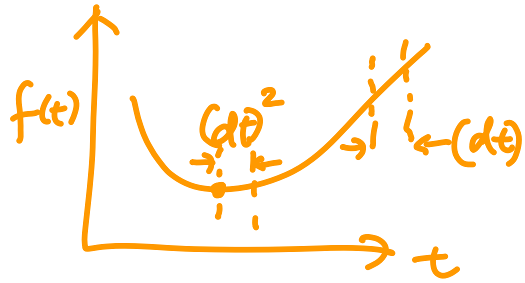
여기까지가 고교 선생님이 Feynman 에게 이야기한 것임

Action $\quad S = \int_{t_1}^{t_2} (KE - PE)\, dt$



끝점은 고정되어 있음.

참고: 보통의 함수 $f(t)$에 대해서 최저값을 구하는것은 $t = ?$



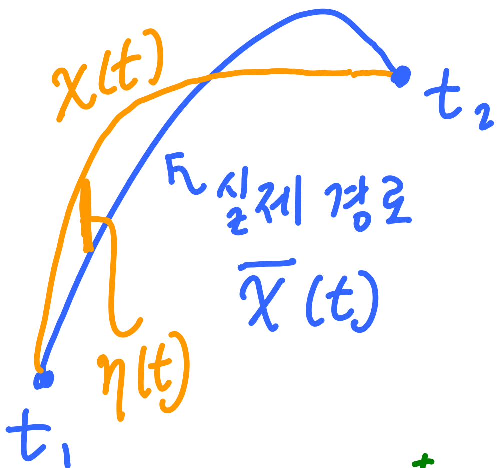
그러나 우리는 어떤 경로에 따라 $S[x(t)]$를 계산함.

⇒ t_m을 찾는 것이 아니라,

t의 함수 $\bar{x}(t)$를 찾음

Taylor expansion

$$f(t_m + \Delta t) = f(t_m) + f'(t_m)\Delta t + \cdots$$



끝점은 고정되어 있음.

Conservative force인 경우를 생각하자!

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - V(x) \right] dt$$

$$V(\bar{x}+\eta) = V(\bar{x}) + V'(\bar{x})\eta + \cancel{\tfrac{1}{2}V''\eta^2} + \cdots$$

$$\left(\frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\bar{x}}{dt}\right)^2 + 2\frac{d\bar{x}}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \cancel{\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2}$$

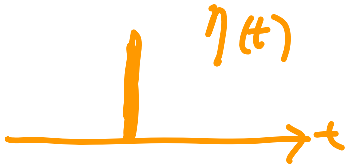
$$S = S_0 + \int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{d\bar{x}}{dt} \frac{d\eta}{dt} - V' \eta \right] dt$$ $\Rightarrow$ 부분적분

$$\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$$

$$= S_0 + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \begin{matrix} \frac{d}{dt}\left(m \frac{d\bar{x}}{dt} \eta \right) \\ - m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} \eta \end{matrix} \right\} dt - \int_{t_1}^{t_2} V' \eta \, dt$$

$$= S_0 + \cancel{\left[m \frac{d\bar{x}}{dt} \eta(t) \right]_{t_1}^{t_2}} - \int_{t_1}^{t_2} \left\{ m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} + \frac{dV}{dx} \right\} \eta(t) \, dt$$

To be minimum, $\eta(t) \times (0)$.



at t
coeff. = 0

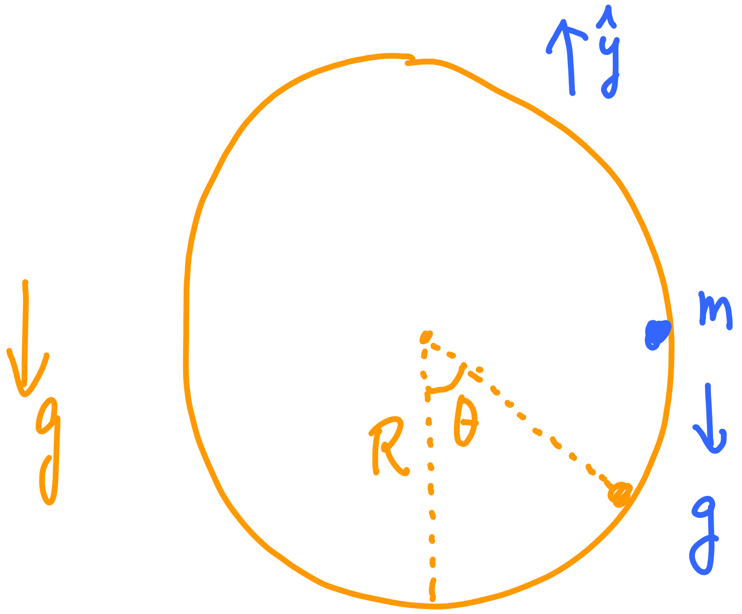
$$\therefore m \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = - \frac{dV}{dx} = F$$

Newton's 2nd Law

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{x}} = \frac{\delta L}{\delta x}$$

$$L = KE - PE = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V$$

Example



$$KE = \frac{1}{2} m v^2$$
$$= \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2$$
$$PE = -mgy$$
$$= \text{Const} - mgR\cos\theta$$
$$KE - PE = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta + \text{constant}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\delta L}{\delta \dot{x}} = \frac{\delta L}{\delta x} \Rightarrow \text{mini-max problem} \therefore x \to \theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\cancel{m}\cancel{R^2}\frac{d\theta}{dt}\right) = +\cancel{m}g\cancel{R}(-\sin\theta)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \underbrace{\frac{g}{R}}_{\omega^2}\sin\theta = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\sin\theta = 0}$$

difficult to solve

Note

$$\theta = 4\tan^{-1} a e^{\omega(t-t_0)} \quad \text{if } -\omega^2 \text{ instead of } +\omega^2$$

$$\theta = ?$$