AGP 09.05.26

Radiation Damping

Radiation resistence : 복사저항

dipole radiation 에서 dipole 에 있는 전하를 가속시키는데는 일이 필요할 것이다. 복사로 나가는 전자파는 E^2에 비례하는 에너지를 가지고 나가기 때문이다. 평균적으로는 energy flux는

$$S = \epsilon_0 c \langle E^2 \rangle$$

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ C^2/N\cdot m^2$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \times 10^{9}\ N\cdot m^2/C^2$$

$$\epsilon_0 c = 2.656 \times 10^{-3}\ C^2/N\cdot m\cdot s$$

$$[E] = [V/m]$$

$$[CV] = [\text{Joule}]$$

$$[\epsilon_0 c E^2] = \left[\frac{C^2}{N\cdot m\cdot s}\cdot V^2 \frac{1}{m^2}\right]$$

$$= \left[\frac{J^2}{N\cdot m^3\cdot s}\right] = \left[\frac{J}{m^2\cdot s}\right] \qquad J = N\cdot m$$

power per area

우리는 current I가 저항 R을 지나가면

$$\text{power} = RI^2 \longleftarrow \text{power}$$

$$V = RI \rightarrow CV = J$$

$$RI \cdot C/s = CV/s = J/s$$

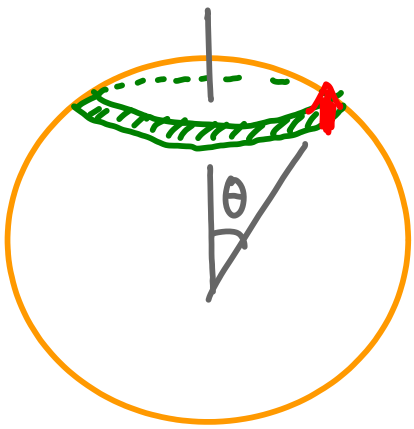
임을 알고 있으므로

$$\text{radiated power} = R_{rad} \langle I^2 \rangle$$

로서 radiation resistence를 정의할 수도 있다.

실제로 "어떤 힘의 mechanism"에 의해 이런 저항을 계산하지는 못했지만 단지 energy conservation을 이용해 Radiation이 방출된 빛의 양을 계산하고 이 결과로서 radiation resistence를 계산한다.

The rate of energy radiation



(29.1)

$$E(t) = \frac{-q\overbrace{a(t-r/c)}^{a'}\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}$$

$$S = \frac{q^2 a'^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r^2}$$

$$dA = (2\pi r)(r\,d\theta \sin\theta) = 2\pi r^2 \underbrace{\sin\theta\, d\theta}_{-d(\cos\theta)}$$

Poynting vector $\vec{E}$ ↑에 수직

$$\text{Power} = \int S\, dA = \int_{-1}^{+1} (\quad)(1-\cos^2\theta)\, d\cos\theta$$

$$= (\quad)\left(2 - \frac{2}{3}\right) = (\quad)\frac{4}{3}\cdot 2\pi$$

$$\boxed{P = \frac{q^2 a'^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}}$$

이것을 써서 당분간 기술하는 radiation damping은

1900년대 초기 물리학에서 중요한 의미를 가지게 된다.

radiation power by an accelerated charge

이 때에는 양자역학이 알려지기 전이었고 어떻게 전자가 radiate 할까? 에 대답은 우리가 지금 생각하는 것과는 판이하게 달랐다. Rutherford의 원자 모형도 없었을 때이었다. 따라서 전자가 구조 를 가지고 있고 retarded time 계산이 이들 점에서 다르다는 생각을 가지고 있었다.

전자의 크기를 생각하는 것이었다.
이것은 지금 우리가 이해하는 것과는 아주 다르다.

어떻든, 우리가 지금 대강 조화진동으로 전자의 가속을 생각했던 것 처럼, $x = x_0 e^{i\omega t}$ 로 쓰면

$$a = -\omega^2 x_0 e^{i\omega t}$$

$$\langle a'^2 \rangle = \frac{1}{2}\omega^4 x_0^2 \quad \because \left(\cos^2\omega t \text{의 average}\right)$$

따라서,

$$P \qquad \frac{q_e^2 \omega^4 x_0^2}{12\pi \epsilon_0 c^3}$$

$$\frac{q_e^2}{4\pi \varepsilon_0} = 8.99 \times 10^9\ N\cdot m^2/C^2 \left(1.6\times 10^{-19} C\right)^2$$

$$\cong 2.3 \times 10^{-28}\ N\cdot m^2$$

$$\equiv e^2, \quad e = 1.5188 \times 10^{-14} \sqrt{N\cdot m^2}$$

$$N\cdot m^2 = (Js)\cdot \frac{m}{s} = \frac{1}{(1.054\times 3)} \times 10^{26}\ \hbar c$$

$$1.054 \times 10^{-34} J\cdot s = \hbar \ : \ J\cdot S = \frac{1}{1.054}\times 10^{34}\ \hbar$$

$$3\times 10^8 \frac{m}{s} = c \ : \ \frac{m}{s} = \frac{1}{3}\times 10^{-8}\ c$$

$$e^2 = \frac{2.3}{3.16} \times 10^{-2}\, \hbar c$$

$$\simeq \frac{1}{137}\, \hbar c$$

Radiation damping

4/22 resonance 에 관한 강의에서

	mechanics	electric circuit
ind. variable	time t	time t
dep. variable	position x	charge q
inertia	mass m	inductance L
resistance	friction γm	resistance $R = \gamma L$
stiffness	spring k	$1/C$
resonance ω_0	$\omega_0^2 = k/m$	$\omega_0^2 = 1/LC$
period	$t_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$	$t_0 = 2\pi/\sqrt{LC}$
Quality factor	$Q = \omega_0/\gamma$	$Q = \omega_0 L/R$

얼마나 천천히 resonance가 die out 하는 것인가? 를 나타내는 quality factor Q 를 $Q = \omega_0/\gamma$ 로 놓았다. 사실 이것은 antenna 에 한주기당 (or per radian) 얼마만큼의 일을 해 줘야 하는 것에 해당하고

$$Q = \frac{W}{dW/d\phi}$$

$$\frac{dW}{d\phi} = \frac{dW}{dt}\frac{dt}{d\phi} \leftarrow 1/\omega$$

$$Q = \frac{\omega W}{dW/dt}$$

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\omega}{Q}W$$

$$W = W_0 e^{-\omega t/Q}$$

따라서 W가 decay하는 time scale 즉 $1/e$로 되는 scale은 ω/Q 이다.

그리고 harmonic oscillator 에서

$E = KE + PE$ 이고 $\langle KE \rangle = \langle PE \rangle$

$$\langle E \rangle = 2\langle KE \rangle$$

$$\langle \tfrac{1}{2} m\omega^2 x_0^2 \rangle$$

$$= \tfrac{1}{4} m\omega^2 x_0^2$$

$$\langle E \rangle = \tfrac{1}{2} m\omega^2 x_0^2$$

$$\boxed{P = \frac{q_e^2 \omega^4 x_0^2}{12\pi \epsilon_0 c^3}} \leftarrow \frac{dW}{dt} \qquad \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0} = e^2 \simeq \frac{1}{137}$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{dW}{dt}\frac{1}{\omega W} = \frac{e^2 \omega^4 \cancel{x_0^2}}{3c^3 \, \omega \frac{1}{2} m\omega^2 \cancel{x_0^2}}$$

$$= \frac{2 e^2 \omega}{3 m c^3}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{c}{\lambda},$$

$$\boxed{\frac{1}{Q} = \frac{4\pi}{3}\frac{e^2}{\lambda m_e c^2}}$$ 길이 차원

$$e^2 \simeq \frac{1}{137}\hbar c, \quad m_e = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$$

$$\hbar = 1.054 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$$

$$c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$$

$$\frac{\hbar}{137 m_e c} = \frac{1.054 \times 10^{-34}}{137 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8}$$

$$\simeq \frac{1.054}{137 \times 27.33} \times 10^{-11} \sim 2.8 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}$$

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2.82 \times 10^{-17}\,\mathrm{cm}$$

classical electron radius (Lorentz)

$$Q = \frac{3\lambda}{4\pi r_0} \approx 5\times10^7$$

for $\lambda = 6000\,\text{Å}$

(노란색)

즉 10^7 oscillation

끝나야 die out.

$$\lambda f = c\ ,\quad f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times10^{10}}{6\times10^3\times10^{-8}} \sim 0.5\times10^{15}/s$$

한 oscillation time $= 2\times10^{-15}$ s

$$10^7\cdot(\text{oscill time}) \sim \boxed{2\times10^{-8}\ s}$$

time scale for Na radiation

γ

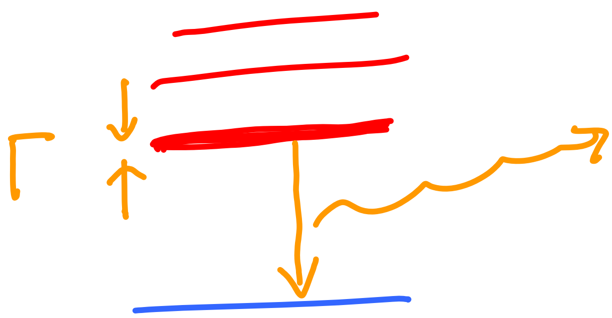
$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \Rightarrow \Delta\lambda = 2\pi c(\Delta\omega)/\omega^2$$

$$= 2\pi c\gamma/\omega_0^2$$

$$= 2\pi c/Q\omega_0 = \frac{\lambda}{Q}$$

$$= \frac{4\pi r_0}{3} = 1.18\times10^{-14}\,m$$

$\boxed{\text{Na}}$ 경우



빛 lifetime $\sim 10^{-8}$ s

그러나 계산은

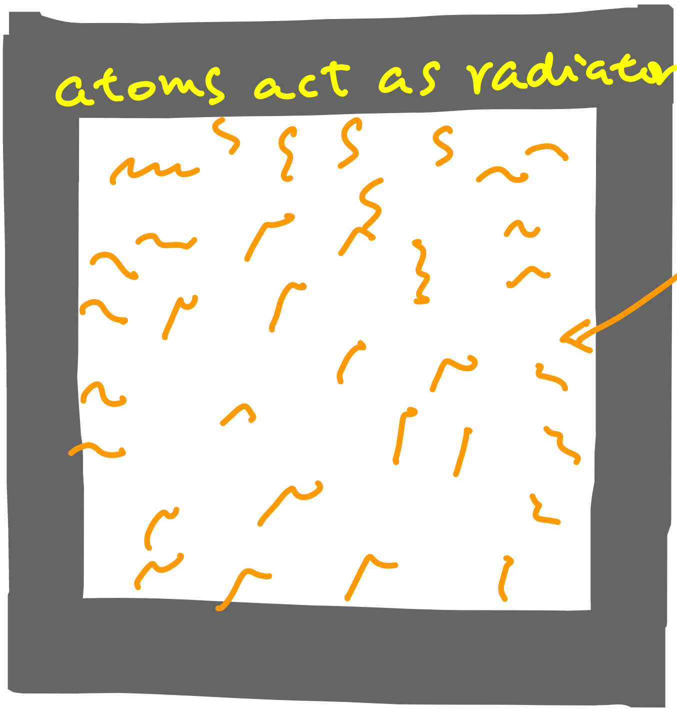
양자 역학적으로

$$\tau \sim \frac{\hbar}{\Gamma}$$

time-energy uncertainty

Thermal equilibrium of radiation

(41.4)



radiator(atom)로 부터 전자기파가 나가고 또는 전자기파를 흡수하고.

이상적인 radiator는 resistence 가 없는 것으로 (radiation resistence 외에는)

① radiator의 평균 energy는 kT로서 얼마나 많은 radiation을 주는지 알 수 있다.

② 평형에 있으면, 이것은 결국 원래의 radiation이 wall에서 반사되는 것과 같다.

①의 계산은 $\frac{dW}{dt} = -\frac{\omega}{Q}W = -\gamma W$, $Q \leftarrow \omega_0/\gamma$

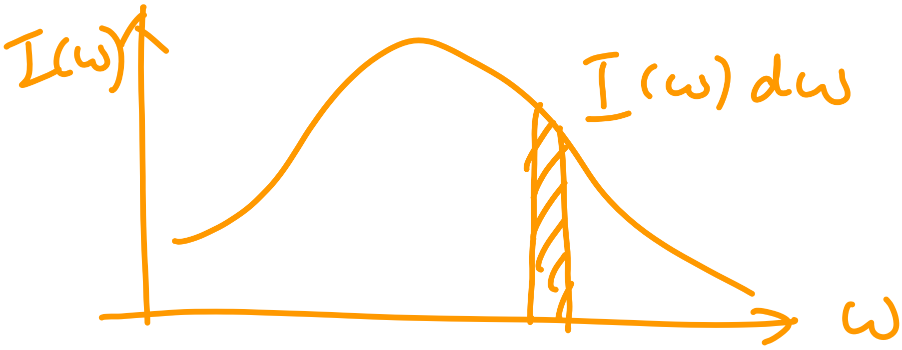
크기만 계산하면,

$$\left\langle \frac{dW}{dt} \right\rangle = \gamma \langle W \rangle = \gamma k_B T$$

$$\gamma = \omega_0/Q = \frac{2}{3}\frac{r_0 \omega_0^2}{c}$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3}\frac{r_0 \omega_0^2 k_B T}{c}$$

② 의 계산은 원래 있던 radiation 이 벽의 atom 에 흡수되는 것이고 같은 양이 radiate 되는 것으로 해석한다. 즉 원래 $d\omega$ 에 $I(\omega)$ 만큼 있다면



$I(\omega)$ = spectral distribution of light : 즉 빛을 쳐다본다면 보이는 색깔이다.

들어 오는 빛이 atom 에 부딪칠 때 cross section σ_s 라면

$$I(\omega)\,d\omega \cdot \sigma_s \longleftrightarrow \text{Energy}/\text{Time}$$

$\left(\frac{\text{Energy}}{\text{Area}} \perp \text{Time}\right)$ Area

$$n-1 = \frac{N q_e^2}{2\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\sigma_s = \frac{8\pi r_0^2}{3}\left(\frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\gamma^2\omega^2}\right)$$

분자를 계산할 때 허점 계산

resonance 에서 크다.

Breit-Wigner form으로 쓰면

$$(\omega-\omega_0)\underbrace{(\omega+\omega_0)}_{2\omega_0} \simeq 2\omega_0(\omega-\omega_0)$$

$$\sigma_s = \frac{2\pi r_0^2}{3}\,\frac{\omega_0^2}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2/4}$$

$$\frac{dW_s}{dt} = \int_0^\infty I(\omega)\,\sigma_s(\omega)\,d\omega$$

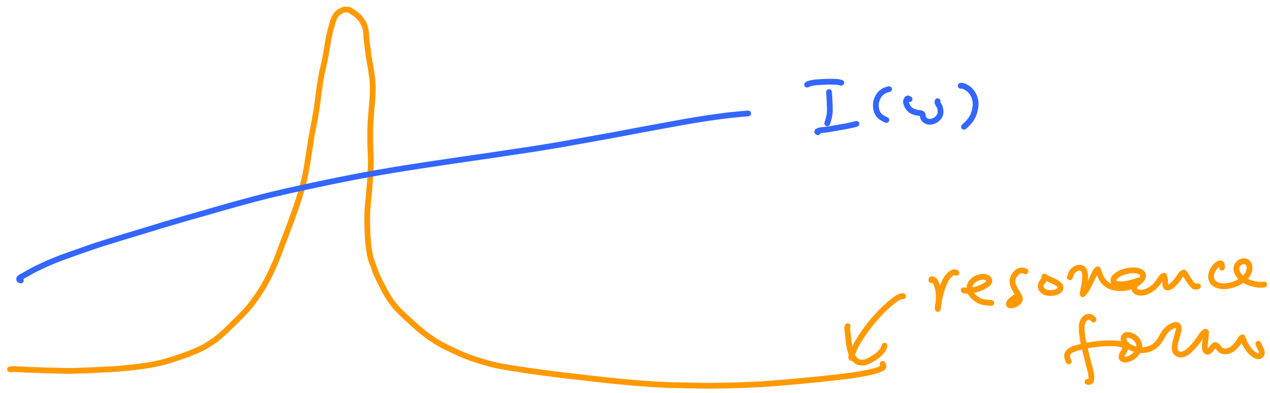
$$= \int_0^\infty \frac{2\pi r_0^2\omega_0^2\, I(\omega)\,d\omega}{3\left[(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2/4\right]}$$

그런데 ① 에서 $dW/dt = 3\gamma kT$

?

oscillator 가 모든 방향(3 방향)으로 oscillate 할 수 있으므로,

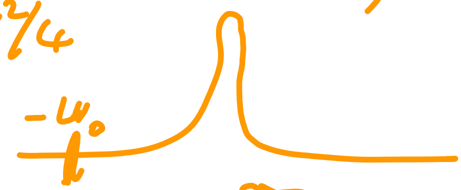
energy는 (degree of freedom) ⊗ kT = 3kT.



따라서 $I(\omega) \cong I(\omega_0)$로 놓고 계산.

$$\frac{2\pi r_0^2 \omega_0^2 I(\omega_0)\, d\omega}{3\left[(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2/4\right]} \text{ 적분은} \Longleftrightarrow 3\gamma k T$$

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2/4}, \quad \begin{aligned} \omega-\omega_0 &= x \\ d\omega &= dx \end{aligned}$$



$$\int_{-\omega_0}^\infty \frac{dx}{x^2+\gamma^2/4} \Longrightarrow \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+\frac{\gamma^2}{4}}$$

$$= \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{-2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\frac{\gamma}{2}\left(\frac{2}{\gamma}dx\right)}{\left(\frac{2}{\gamma}x\right)^2+1} = \frac{2}{\gamma}\int_{-\infty}^\infty \frac{d\xi}{\xi^2+1}$$

$$= \frac{2}{\gamma}\tan^{-1}\xi\Big]_{-\infty}^\infty = \frac{2}{\gamma}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{2\pi}{\gamma}$$

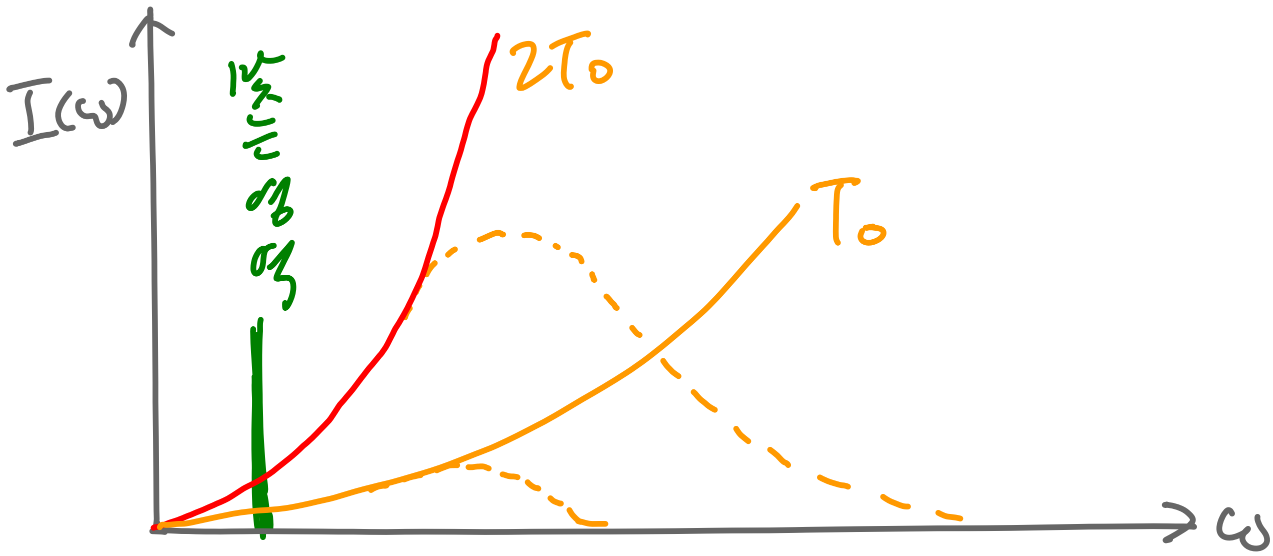
$$\frac{4\pi^2}{3\gamma} r_0^2 \omega_0^2 I(\omega_0) = 3\gamma k T$$

$$I(\omega_0) = \frac{9\gamma^2 k T}{4\pi^2 r_0^2 \omega_0^2}$$

$$\gamma^2 = \left(\omega_0/Q\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\frac{r_0\omega_0^2}{c}\right)^2 = \frac{4}{9}\frac{r_0^2\omega_0^4}{c^2}$$

$$\boxed{I(\omega) = \frac{\omega^2 kT}{\pi^2 c^2}}$$ Rayleigh 법칙

radiator의 성질은 없어졌다.



Black body를 열어 보면, x-ray γ-ray가 막 쏟아진다는 것인데 황당한 이야기다.

전에 살펴 보았던 C_p/C_v 의 양자화와 함께 classical mechanics 의 한계를 들어내고 있다.

우리가 harmonic oscillator의 energy를 $\frac{1}{2}\omega_0^2 x_0^2$ 으로 놓았는데 이것이 고전역학의 한계이었다.

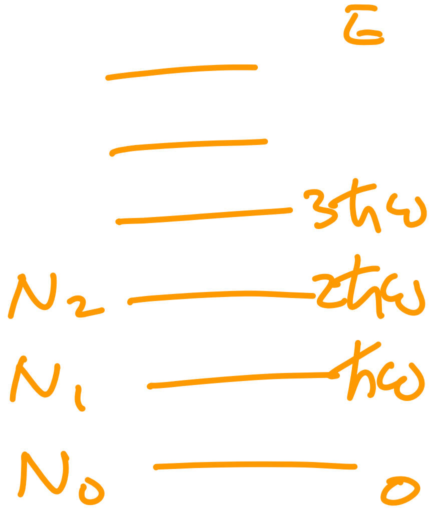
Planck (1900) 실험적으로 … 가는 spectrum을 관찰한 결과를 fit하고 그 공식을 정당한 가정하에 유도하였다.

평형에 있을 때, E의 에너지를 가질 확률은 ~ $e^{-E/kT}$ 라 보았는데, Planck는 harmonic oscillator가 연속적 energy를 가지는게 아니라, 양자화된 E를 가진다고 가정했다.

$$N_{tot} = N_0 + \underset{N_0 x}{N_1} + \underset{N_0 x^2}{N_2} + \cdots = N_0(1+x+x^2+\cdots)$$

$$E_{tot} = N_0 E_0 + N_1 E_1 + N_2 E_2 + \cdots = N_0 \hbar\omega (x + 2x^2 + \cdots)$$

$$x = e^{-\hbar\omega/kT}$$



$$N_{tot} = N_0(1+x+x^2+\cdots)$$

$$= \frac{N_0}{1-x}$$

$$E_{tot} = \frac{dN_{tot}}{dx} \cdot x\hbar\omega = x\hbar\omega \frac{N_0}{(1-x)^2}$$

$$\bar{E} = \frac{E_{tot}}{N_{tot}} = \frac{x\hbar\omega}{1-x} = \frac{\hbar\omega}{x^{-1}-1}$$

$$\langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

kT가 클 때
ω가 작을 때 } 고전의 맞는 영역을 줌

$$I(\omega) = \frac{\omega^2 kT}{\pi^2 c^2}$$

$\langle E \rangle$

$$I(\omega)\,d\omega = \frac{\hbar\omega^3\,d\omega}{(\pi^2 c^2)\left(e^{\hbar\omega/kT} - 1\right)}$$

Planck's law

이것이 양자물리의 시작이다.

AGP 09.05.31

Quantum behavior

지난 몇시간에 걸쳐 파동, 특히 전자파에 대해 살펴 보았다. 전자파를 dipole oscillation에 의한 radiation으로 모두 설명했으며, 사실 전자파가 양자(photon)라는 사실을 쓰지 않으므로 기술이 가능한 현상들을 살펴 보았다. 이는 아주 다행스런 결과이었다. 즉 물질의 성질이 전자기장으로 크게 달라지는 분위기 아니라면.

"양자물리는 원자정도 크기의 영역에서 물질의 현상을 구체적으로 자세히 기술하는 분야이다. 특히 전자의 기술이 주라고 보면 된다."

노트 제목 2009-06-15

1925~27 양자역학의 태동.

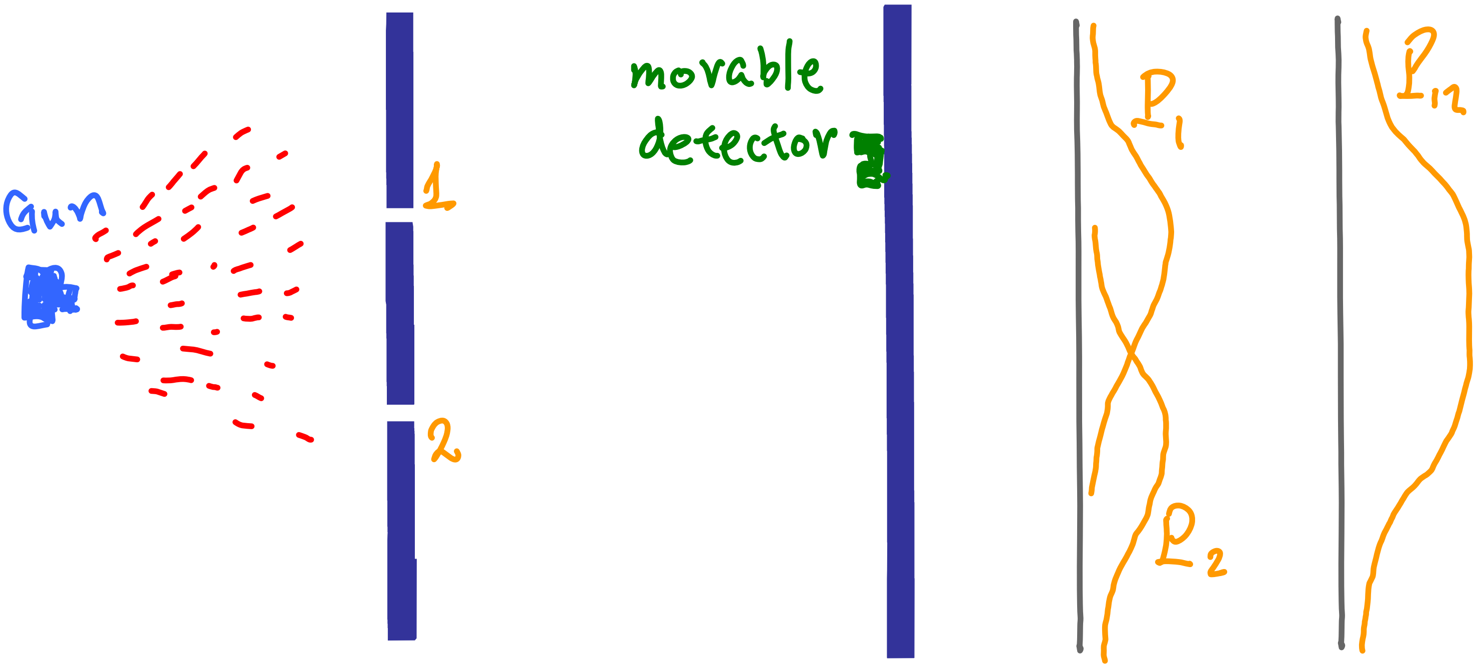
지금도 전문가들 사이에서도 양자물리의 원래 기술 대로 이해하는 것은 흔하지 않다.

오늘은, 역사적(지난강의) 발전이나 다른 비슷한 현상을 기술하는 것 대신, 양자 현상의 근원적 문제를 보여주는 것을 보여주고,

어떤 방법으로 우리는 이 현상을 설명하는지 기술한다. 왜 이 방법이어야만 하는지에 대한 설명은 아무도 할 수 없다.

총알 실험

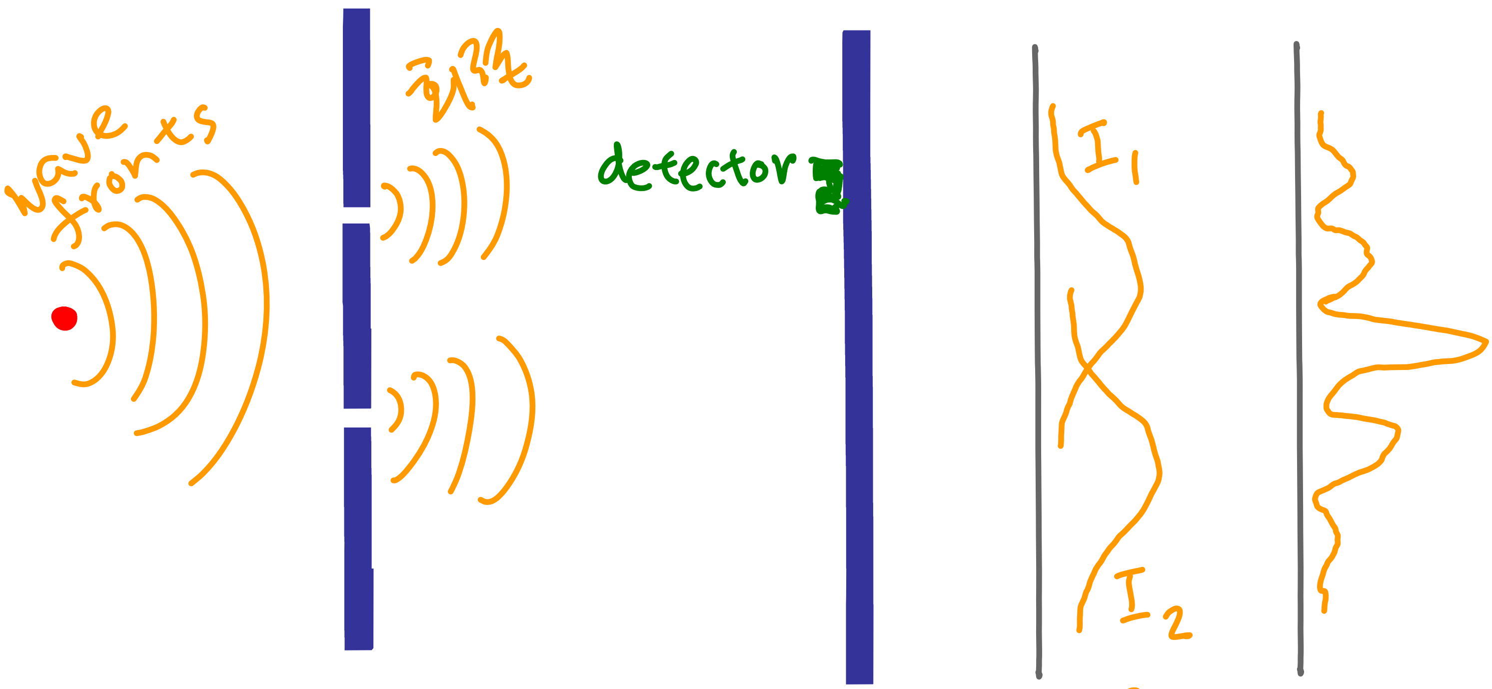
고전적으로 고려할 수 있는 아주 작은 입자(총알이라 부른다)는 더 이상 쪼갤 수 없다고 하자. 즉 관측하면 온개의 총알만 보지, 쪼개진 총알을 보는 일은 없다.



$P_{12} = P_1 + P_2$

$$P_{12} = P_1 + P_2$$

Water wave



$I_1 = |h_1|^2$

$I_2 = |h_2|^2$

Intensity (energy)

$$I_{12} = |h_1 + h_2|^2$$

(중앙쪽에서 큰거가 보인다 합치 않는다)

이 wave의 모양은, 전자들에게서 자취를 기술했듯이

$$h_1 e^{i\omega t}, \qquad h_2 e^{i\omega t}$$

complex

$$\hat{h}_1 e^{i\alpha} \qquad \hat{h}_2 e^{i\alpha} e^{i\delta}$$

$$I_1 = |\hat{h}_1|^2, \qquad I_2 = |\hat{h}_2|^2$$

$$I_{12} = |h_1 + h_2|^2 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\delta$$

interference term

이상이 입자들 파동에 대해 우리가 알아낸 사실이다.

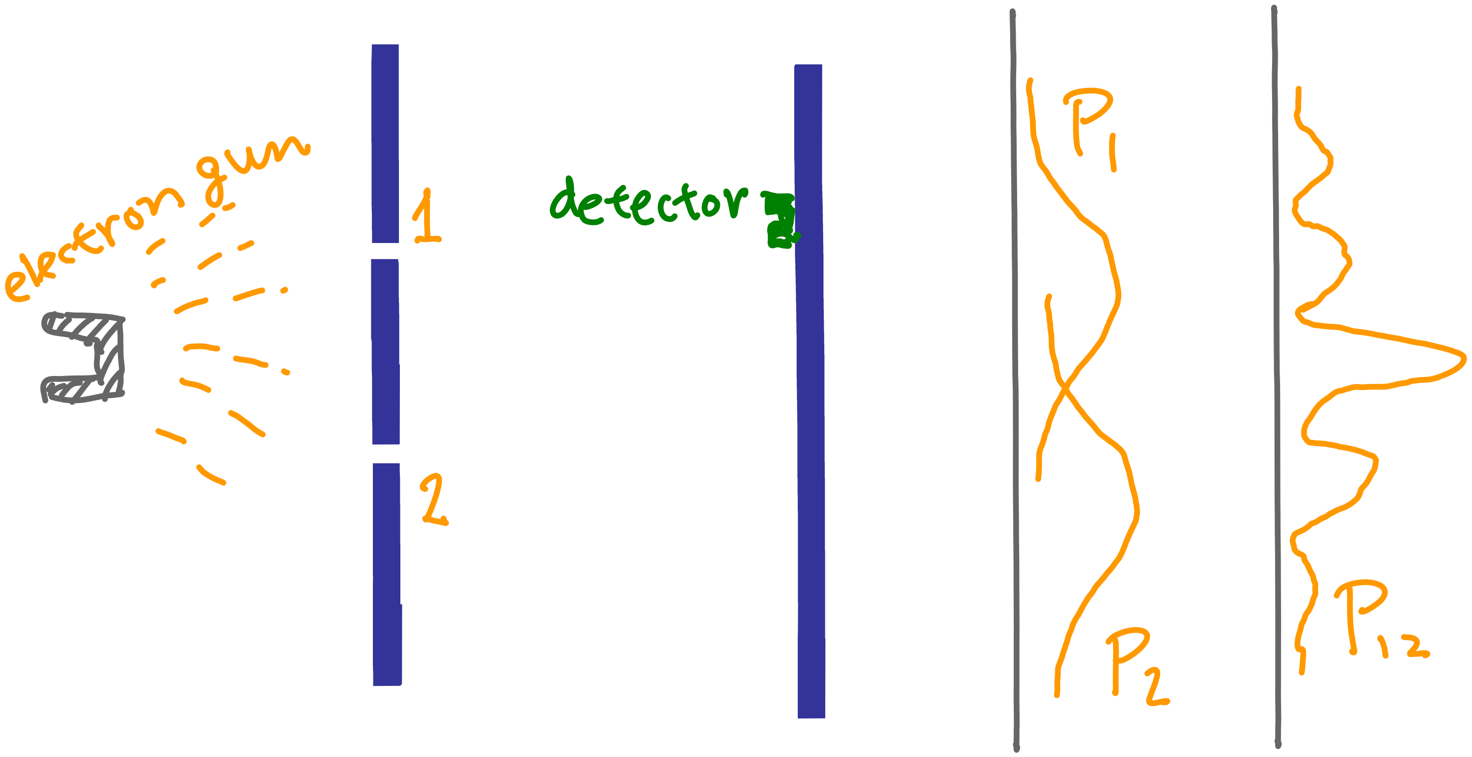
전자를 Geiger counter로 관측하면 조각의 전자가 기록된다. 즉 전하는

$$q_e = -1.6 \times 10^{-19}\ C$$

$$m_e = 9.1 \times 10^{-31}\ kg$$

전자는 쪼개진 상태로는 결코 관측되지 않는다.

실험



$P_1 = |\phi_1|^2$

$P_2 = |\phi_2|^2$

$$P_{12} = |\phi_1 + \phi_2|^2$$

wave라 할 수도, 입자라 할 수도 없다.

wave라 할 수도, 입자라 할 수도 있다.

간섭현상이 있다.

흔적만 보인다.

이 현상이, 전자가 원자정도의 크기에서 보이는 현상이다. 물리현상으로서, 우리는 이것을 설명해야 한다.

온대로 보이는데, 이때까지의 경험상 생각할 수 밖에 없는 전자가 구멍1로 가거나 구멍2로 가는 것이다. 온거니까. 쪼개져서 갈 수 없으니까.

물론 구멍2를 막거나 구멍1을 막으면 잘 아는 즉 구멍1을 통과하거나 구멍2를 통과하는 두개의 전자를 본다.

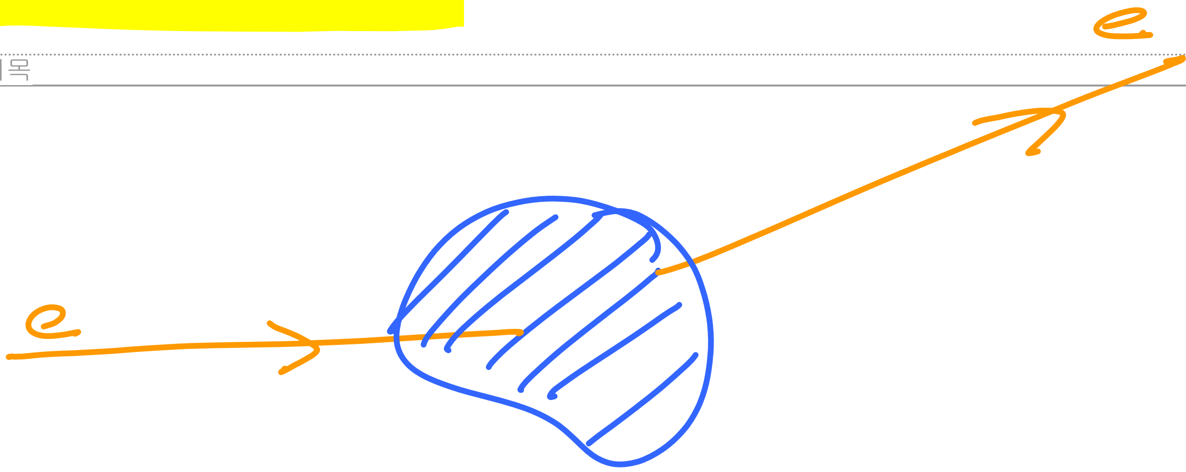
그러나 구멍1을 갔다 되돌아서 구멍2에 갔다 .... 이런 복잡한 경로로 해서 P_{12}를 설명할 수 있는 사람은 없었다.

즉 interference pattern은 wave의 성질이고,

$$P_{12} = |\phi_1 + \phi_2|^2 \qquad ①$$

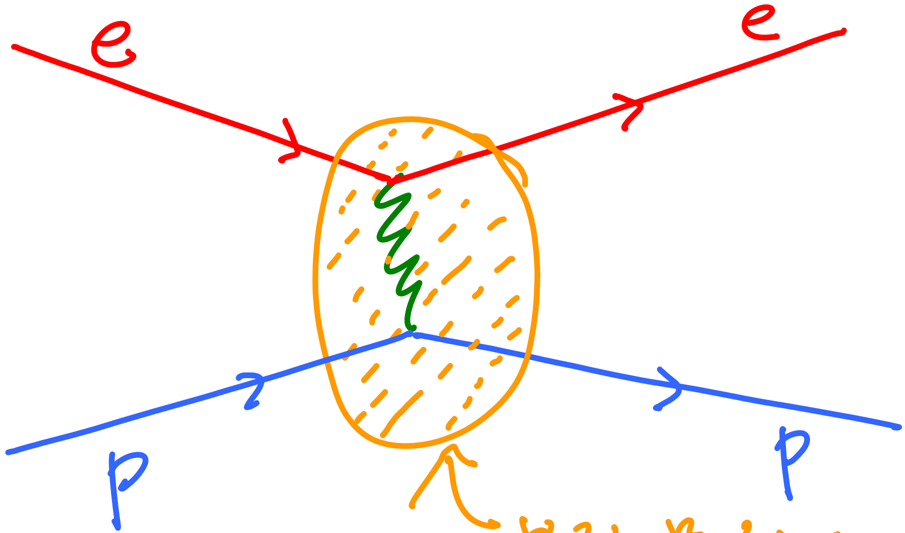
으로만 설명이 가능하다. 따라서 전자는 입자의 성질도 가지고 wave의 성질도 가진다. 이것이 우리가 관측하는 만고 불변의 진실이다.

아마 이런 기본 원리에 우리가 익숙하지 않은 것은 우리의 어려서부터의 배움이 고전적 관념이었기 때문일 것이다. 공식 ①로 어려서부터 배웠다면?



우리가 보지 않는 영역

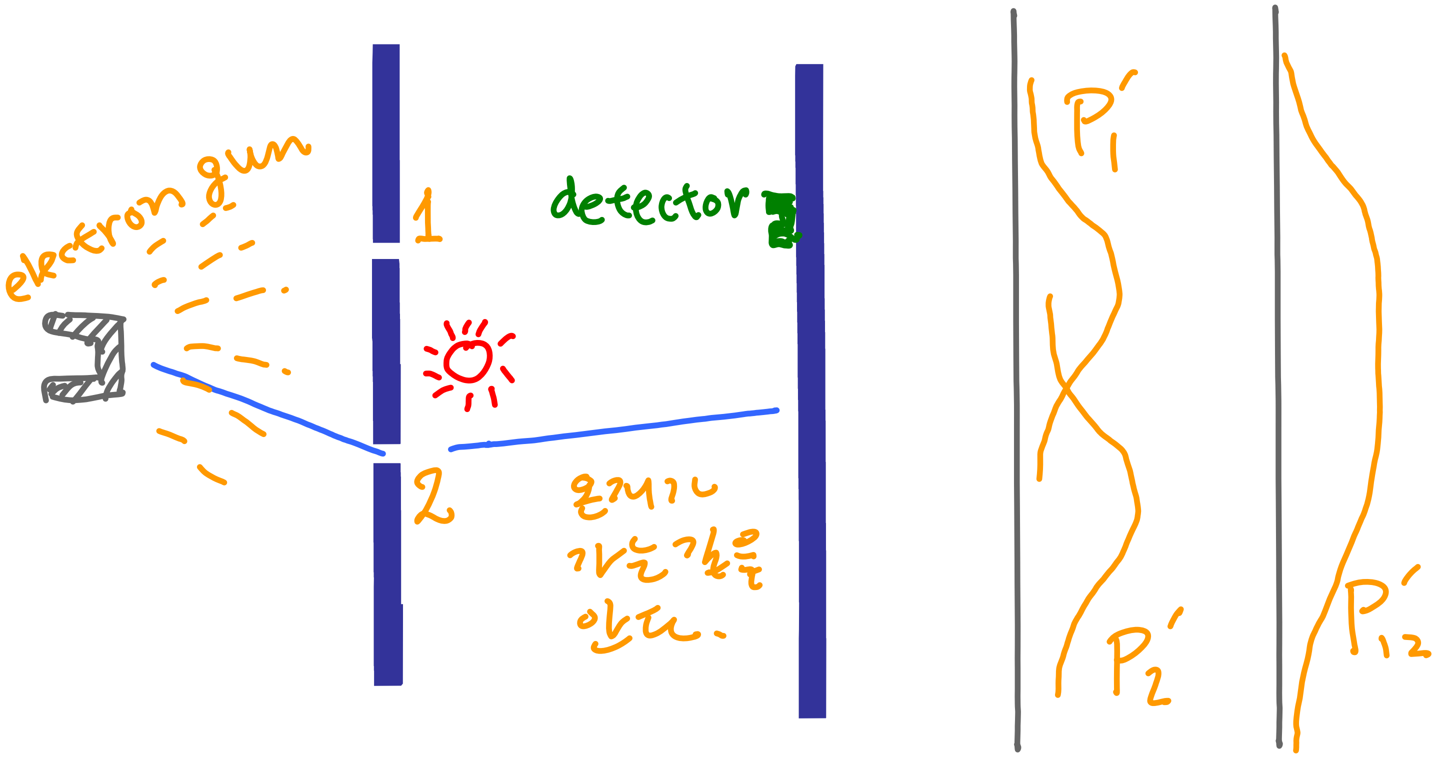
Feynman diagram:



보지 못한다. (atomic size)

따라서 모든 가능성을 다 생각한다

그러나, 구체적으로 어떻게 이 영역을 지나가는지 볼 수 없나?
(New wave front there)



본다는 것도 어떤 형태로는 전자의 운동에 영향을 미쳐서 경로를 변하게 했다 볼 수 있다. P_{12}'이 관측 결과이다. 1이나 2에서 wave front가 다시 시작되는 것이라 할 수 없다.

그런데 전자를 본다는 것과, 보여진 전자들, 논리적 실험(Gedanken experiment)을 통해 생각해 보자.

frequency ω가 크면 E도 크다. E가 크면 쉽게 e의 운동을 변화시킨다.

따라서, 아주 낮은 frequency로 가면 전자의 운동이 크게 변화되지 않을 것이고, interference가 예상된다.

그런데 전자를 본다는 것? 그것은 무엇인가? 광자가 전자와 부딪치는 것이다. 아직 빛에 대해서는 lump가 부딪치지 않았지만 바로 이렇게 해서 전자가 어느 구멍으로 갔지 알 수 있다. 그런데 본다는 것은 광자 한개이므로 frequency를 낮추면 언제는 볼 때도 있고 언제는 못보기도 할 것이다. (frequency가 아주 크면 항상 보겠지만)

따라서 실험을 하는데

Detector에 도달하는 event에 대해 구멍 1 또는 2에서 보였는가? 가 관심거리다.

ω가 작을 때는 반드시 광자 보이지 않고 구멍을 빠져 나왔을 것이다.

Hole 1 Yes Detector Yes : P_1'

Hole 2 Yes Detector Yes : P_2'

Hole 1 No Hole 2 No Detector Yes : P_{12}'

어떤 방법으로든 전자의 운동을 간섭하지 않고 전자를 볼 수는 없는가? 양자론에서는 No!!

전자를 보았다면, 주변 빛이 어느 정도 momentum을 주고 우리 눈에 들어 왔을 것이다.

$$\text{light}: \quad p = \frac{h}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

전자에 주는 momentum이 작게 하려면 광자의 wave length가 커야 한다.

전자를 보긴 보았는데 전자의 momentum이 크게 변하지 않게 하려면 광자의 파장이 커야 한다.

어느 정도로? 구멍사이의 거리 d 보다 크면, 구멍 1로 가는지 구멍 2로 가는지 본다는 것이 확실치 않다.

즉 구멍을 통과할 때의 전자의 위치를 확실히 $+\frac{d}{2}$ 또는 $-\frac{d}{2}$로

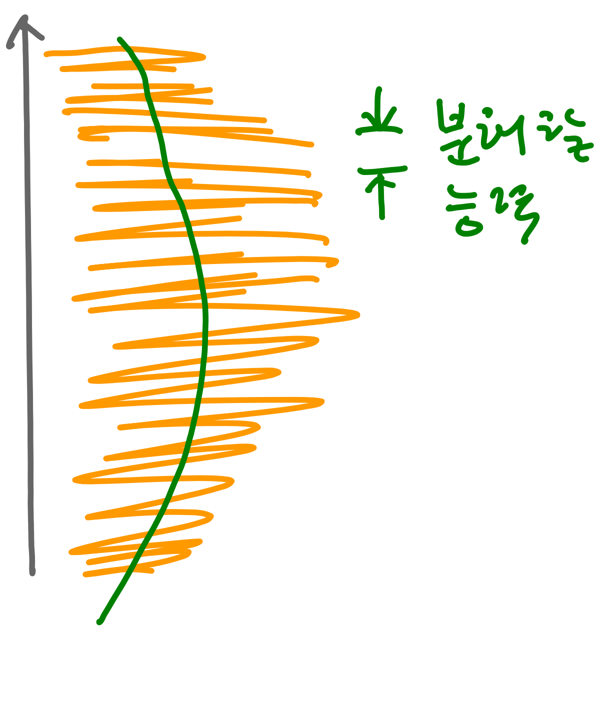
갈 수 있으려면 $\lambda < d$ 이어야 한다. d를 전자 위치의 uncertainty Δy 로 잡을 수 있다. 그럼 전자 운동량의 Δp_y 는

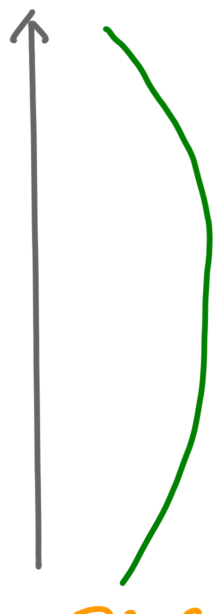
$$\Delta y \, \Delta p_y \sim h$$

이다. Heisenberg uncertainty relation.

전자 관측 실험에 의한 피할 수 없는 결과이다.

고전적 momentum 은 원자 level 에서 전자 관계의 momentum 보다 아주 크다.





고전적으로는 간섭 현상이 안 보인다.

양자 물리는 단지 예측을 probability로

P = probability

ϕ = probability amplitude

$$P = |\phi|^2$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \,, \quad P = |\phi_1 + \phi_2|^2$$

이런 물리학이 완전히 deterministic은 아니지만 이 이상 정확히 물리는 예견할 수 없다.

Size of H atom 정성적 기술

$$E = \frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{a}$$

de Broglie

ground state : $E = E_{min}$

$$\partial E/\partial a = 0 \qquad \frac{-2\hbar^2}{2ma^3} + \frac{e^2}{a^2} = 0$$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0.528\ \text{Å}$$

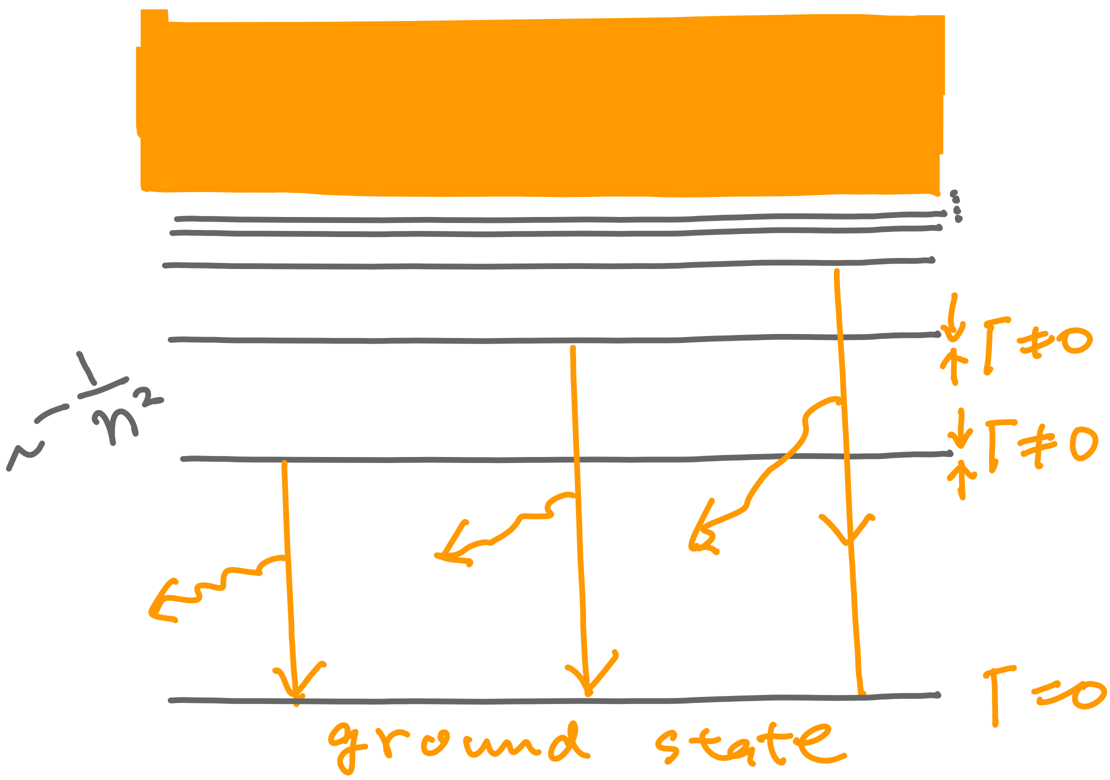
Bohr radius

$\hbar = 1$: $\frac{1}{e^2} = 137$

$c = 1$: $\frac{1}{m_e} = 3.86 \times 10^{-11}\,\text{cm}$

$$E_{ground} = -\frac{e^2}{2a} = \frac{-me^4}{2\hbar^2} = -13.6\,\text{eV}$$

Energy levels



frequency 에 대한 Ritz combination rule

Philosophical questions :

decide yourself.

If you understand it correctly, you may not utter ridiculous statements.

"양자 역학은 probabilistic prediction"