연산자 양자 중첩의 구현을 이용한 보존 교환관계의 직접적 증명

DOI: 10.3938/PhiT.19.020

정 현 석

Direct Proof of the Bosonic Commutation Relation Using the Implementation of Quantum Superpositions of Operators

Hyunseok JEONG

I review a recent breakthrough in testing a fundamental relation of quantum mechanics, namely, a direct demonstration of the bosonic commutation relation based on the implementation of quantum operators on an arbitrary state.

서 론

양자역학은 근본적 및 실용적 관점 모두에서 현대 물리학 혹은 현대 과학의 가장 핵심적인 이론이라고 해도 과언이 아닐 것이다. 양자 역학의 형식적 기술은 두 가지 중요한 구성 요소로 이루어져 있다. 첫째는 물리계의 상태(state)를 기술하는 상태 벡터(혹은 파동 함수)이며 이는 힐버트 공간(Hilbert space)이라는 벡터 공간에서 정의된다. 둘째는 주어진 상태 벡터에 대해 잘 정의된 작용(operation)을 기술하는 연산자(operator)이다. 연산자가 주어진 상태 벡터에 적용되면 일반적으로 그 상태 벡터를 다른 상태 벡터로 바꾸게 된다. 연산자는 특히 관측 가능한 물리량을 기술하는 데 유용하게 사용된다. 이 두 가지 요소-상태 벡터와 연산자-는 양자역학의 수학적 구조 전체를 떠받치고 있다고 할 수 있으며 각각 고전적인 대응 요소들과 본질적으로 다른 주목할 만한 특징을 가지고 있다.

먼저 물리계의 상태와 관련해서 양자역학과 고전 물리학을 본질적으로 구분 짓는 가장 근본적인 특징은 양자 중첩의 원리라고 할 수 있다. 앞서 언급한 바와 같이 양자역학에서 물리계의 상태는 규격화된 상태 벡터에 의해 기술된다. 예를 들어 A라는 위치에 존재하는 전자와 B라는 위치에 존재하는 전자는 각각 다른 상태 벡터들에 의해 기술된다. 그런데 양자역학의 중첩 원리는 전자라는 물리계가 이렇게 서로 구별되는 두 개의 상태들의 선형 중첩으로 정의되는 제삼의 상태로 존재할 수 있는 가능성을 배제하지 않는다. 즉 A라는 위치에 존재하는 전자 상태와 B라는 위치에 존재하는 전자 상태의 중첩이 물리적으로 존재 가능한 전자의 또 다른 상태가 되는 것이다. 양자 중첩이라는 형식적인 기술은 양자 간섭과 같이 고전적으로 설명하기 어려운 물리 현상을 기술하는 데 지극히 유용하다.

물론 양자 중첩 상태는 고전 과학의 패러다임 안에서는 극히 이해하기 어려운 것이다. 따라서 이러한 양자 중첩을 어떻게 이해하고 해석해야 하는가는 양자역학의 태동기부터 난제로 여겨져 왔다. 양자 중첩에 대한 이해 및 해석의 곤혹스러움은 거시적인 영역으로 가면 더욱 극단화된다고 할 수 있다. 1935년 제안된 슈뢰딩거의 고양이 역설은 이러한 어려움을 드러내어 주는 가장 유명한 묘사일 것이다.[1] 양자 역학의 중첩 원리에 따르면 고양이와 같이 거시적인 물리계조차도 “죽어있는 상태와 살아있는 상태의 중첩”이라는 상식적으로 이해하기 어려운 상태에 존재할 수 있는 가능성을 갖게 된다. 이러한 거시적 양자 중첩 상태(“슈뢰딩거 고양이” 상태)의 실제 구현과 관측은 물리학자들의 큰 관심사가 되어 왔다. 최근 전형적인 양자 간섭 실험에서 상당 수준 벗어난 규모라고 할 수 있는 분자 수준의 양자 간섭이 관측되기도 했으며,[2] 보다 더 최근에는 빛의 슈뢰딩거 고양이 상태가 구현되어 거시적 양자 검증 및 제어의 첫걸음을 내딛기도 했다.[3]

양자역학의 이론적 구조를 완성하기 위해서는 상태 벡터뿐 아니라 양자 연산자들이 필수적이다. 연산자와 관련해서 양자역학과 고전물리학을 구분 짓는 가장 중요한 특징은 이들의 교환 불가능성이라고 할 수 있다. 고전적인 물리량이나 변수들과는 달리 양자 연산자들은 양자 상태에 적용될 때 그 순서가 바뀌면 결과가 달라지는 특성을 가진다. 즉 두 작용이 어

저자약력

정현석 교수는 영국 Queen’s University Belfast(2000-2003)에서 박사학위 취득 후 호주 University of Queensland 연구원(2003-2008)을 거쳐 현재는 서울대학교 물리천문학부 조교수로 재직 중이다. 거시 양자제어 연구단(창의연구사업)의 단장으로 거시계의 양자 제어에 대한 연구를 수행하고 있다. (jeongh@snu.ac.kr)

REFERENCES

[1] E. Schrödinger, Naturwissenschaften. **23**, 807-812; 823-828; 844-849 (1935).
[2] M. Arndt *et al.*, Nature **401**, 680 (1999).
[3] A. Ourjoumtsev, H. Jeong, R. Tualle-Brouri and Ph. Grangier, Nature **448**, 784 (2007).

떤 순서로 적용되느냐에 따라 일반적으로 다른 결과를 가져오게 되는 것이다. 가장 잘 알려진 교환 관계식은 불확정성 원리와 밀접한 관계를 가지는 위치와 운동량에 대한 교환 관계식이다. 또 다른 유명한 교환 관계식으로 생성 연산자(creation operator)와 소멸 연산자(annihilation operator) 사이의 보존 교환 관계식이 있으며, 이는 위치와 운동량에 대한 교환 관계식과 밀접한 관계가 있는 교과서적인 관계식이다.

이러한 교환 관계식들의 직접적인 실험적 검증은 최근까지 이루어지지 않았다. 2005년 Parigi 등은 열 상태(thermal state)의 빛에 광자를 더하는 작용과 제하는 작용을 순차적으로 적용했을 경우와 두 작용을 그 반대의 순서로 적용했을 경우에 서로 다른 상태들이 생성된다는 것을 보였다.[4] 매우 최근에 저자를 포함한 연구자들이 광자의 양자 간섭을 이용한 보존 교환관계의 직접적 검증 방법을 제안하였고,[5] 양자 광학적 도구들을 이용한 실험적 검증이 이루어졌다.[6] 이러한 성공은 보존 교환관계의 최초 증명이라는 점에서 의미가 있을 뿐 아니라, 양자 연산자들의 중첩을 구현하여 보다 효율적인 양자 제어를 실현할 수 있는 가능성을 열고 있다. 이어지는 글에서 이러한 보존 교환관계의 증명 방법[5]과 그 실험적 수행[6]에 대해 설명하고자 한다.

단일 광자 더하기와 빼기 작용의 구현

빛의 양자이론에서 소멸 연산자 a와 생성 연산자 $a^\dagger$는 각각 주어진 진동수의 빛의 상태에서 에너지의 최소 단위인 광자 하나를 제하거나 더하는 작용을 하는 연산자이다. 이 두 연산자 사이에는 다음과 같은 보존 교환관계(bosonic commutation relation)가 성립한다.

$$[a, a^\dagger] \equiv aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \tag{1}$$

a와 $a^\dagger$가 정확히 광자 n개가 존재하는 상태인 광자 수 상태 $|n>$에 적용되면 수 상태는 다음과 같이 바뀌게 된다.

$$a|n> = \sqrt{n}|n-1>, \tag{2}$$
$$a^\dagger|n> = \sqrt{n+1}|n+1> \tag{3}$$

a와 $a^\dagger$는 에르미트 연산자(Hermitian operator)가 아니며, 따라서 측정 가능한 물리량(observables)에 해당되지 않는다. 또한 이들은 유니터리(unitary) 연산자들이 아니므로 결정론적인(deterministic) 구현은 가능하지 않다.

최근의 광자 제어 기술의 발전은 a와 $a^\dagger$에 해당하는 단일 광자를 더하거나 빼는 작용을 매우 정확한 수준까지 가능하게 하였다.[4-7] 먼저 단일 광자를 빼는 기술은 투과율이 큰 빛 나누개(beam splitter)와 광자 검출기를 이용하여 비교적 간단히 구현이 가능하다. 그림 1(a)과 같이 입사광을 투과율이 큰 빛 나누개에 통과시킨 후 반사되는 빛에서 광자 검출기(photon detector)에 의해 하나의 광자가 검출되면 단일 광자가 제해진 것이 확인되게 된다. 여기서 한 가지 문제는 현재 기술로는 검출기의 효율에 한계가 있고 광자의 개수도 정확히 세지 못하므로 검출기에 정확히 하나의 광자만이 입사되었는지 알아내기 어렵다는 것이다. 그러나 빛 나누개의 투과율을 1에 가깝게 하면 반사되는 빛에 한 개가 넘는 광자가 검출될 확률은 작은 값이 되도록 제어할 수 있게 된다. 또한 광자가 검출되지 않을 때는 아무런 행위도 하지 않기 때문에 검출기의 효율은 큰 문제가 되지 않는다. 이렇게 a라는 연산자의 물리적 구현이 근사적으로 가능하다. 단일 광자를 더하는 기술 또한 그 실험적 구현이 잘 알려져 있다.[8,9] 그림 1(b)와 같이 입사되는 광자를 먼저 비선형 매질을 통해 더 낮은 에너지를 가진 광자들의 쌍으로 나누는 기술(parametric down conversion)[10]을 통해 생성된 광자쌍의 한 부분을 입사하는

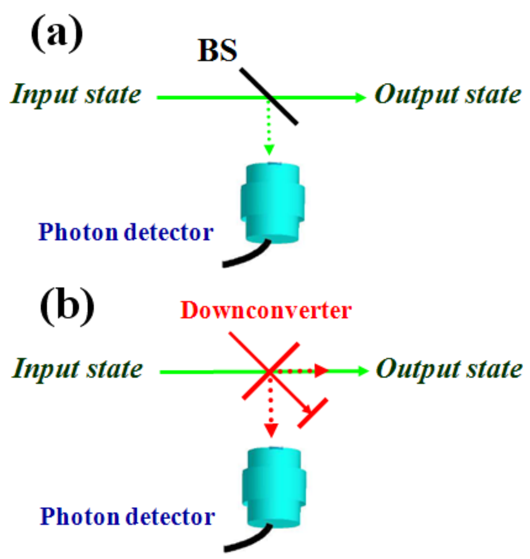

Fig. 1. Schematic of (a) photon subtracting and (b) photon adding techniques from the incident state.

REFERENCES

[4] V. Parigi, A. Zavatta, M. S. Kim and M. Bellini, Science **317**, 1890 (2007).
[5] M. S. Kim, H. Jeong, A. Zavatta, V. Parigi and M. Bellini, Phys. Rev. Lett. **101**, 260401 (2008).
[6] V. Parigi, A. Zavatta, M. S. Kim, H. Jeong and M. Bellini, Phys. Rev. Lett. **103**, 140406 (2009).
[7] M. S. Kim, J. Phys. B **41**, 133001 (2008).
[8] G. S. Agarwal and K. Tara, Phys. Rev. A **43**, 492 (1991).
[9] A. Zavatta, S. Viciani and M. Bellini, Science **306**, 660 (2004).
[10] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics* (Springer, Berlin, 1994).

빛과 합해지게 한다. 광자쌍의 다른 부분은 광자 검출기를 향하게 하고, 검출기에서 광자쌍이 생성되었음을 확인하는 방법으로 단일 광자 더하기($a^\dagger$)를 근사할 수 있다.

흥미롭게도 단일 광자 더하기와 빼기의 연속적 구현은 그 반대의 경우와 일반적으로 다른 결과를 가져온다. 간단한 예로 α라는 진폭을 가지는 결맞음 상태(coherent state)

$$|\alpha> = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n> \qquad (4)$$

에 단일광자를 더한 후에 빼는 경우를 고려해 보자. 결맞음 상태는 양자광학에서 매우 중요한 역할을 하는 상태로 레이저가 이러한 상태의 좋은 근사로 알려져 있다. 결맞음 상태에 광자를 더한 후에 제한 상태는 규격화 조건을 고려하면

$$|\psi_{as}> = \frac{aa^+|\alpha>}{\sqrt{<\alpha|aa^+aa^+|\alpha>}}$$

로 표시될 수 있다. 반면에 단일광자를 제한 후에 더한 상태는 결맞음 상태가 소멸 연산자의 고유 상태라는 점을 고려하면

$$|\psi_{sa}> = \frac{a^+|\alpha>}{\sqrt{<\alpha|aa^+|\alpha>}}$$

와 같이 나타낼 수 있다. 이 두 상태들은 명백히 서로 다르며 양자 상태들 사이의 유사성에 대한 척도인 신뢰도(fidelity)를 구해 보면 α가 작을수록 두 상태들 사이의 신뢰도가 낮음을 볼 수 있다.

Parigi 등은 위에서 설명한 결맞음 상태 대신 열 상태를 이용하여 앞서 기술한 두 경우를 구현, 서로 다르다는 것을 실험적으로 보였다.[4] 이들은 열 상태에 단일 광자를 더하고 제한 상태와 동일한 상태에 단일 광자를 제하고 더한 상태를 각각 호모다인 측정을 통한 단층촬영 기법(tomography)를 통해 위그너 함수(Wigner function)를 재현했다. 위그너 함수는 유사 확률분포 함수(quasi-probability function)의 일종으로 상태 벡터와 동등하며 주어진 상태에 대한 모든 가능한 정보를 포함한다. 실험 결과에 따르면 두 상태들은 명백히 다른 위그너 함수를 보였고, 이는 동일한 초기상태에 적용된 두 작용이 서로 다른 결과를 가져왔음을 의미한다.

보존 교환 관계의 실험적 검증과 연산자 중첩의 물리적 구현

Parigi 등의 실험[4]은 $aa^\dagger$와 $a^\dagger a$를 각각 주어진 열 상태에 따로 적용했을 뿐 $aa^\dagger$와 $a^\dagger a$의 양자 중첩을 구현한 것은 아니었다. 보존 교환관계의 직접적인 증명을 위해서는 그 형태인 $aa^\dagger - a^\dagger a = 1$에서 보듯이 $aa^\dagger$라는 작용과 $a^\dagger a$라는 작용의 결맞는 양자 중첩을 구현하여 주어진 상태에 적용할 수 있어

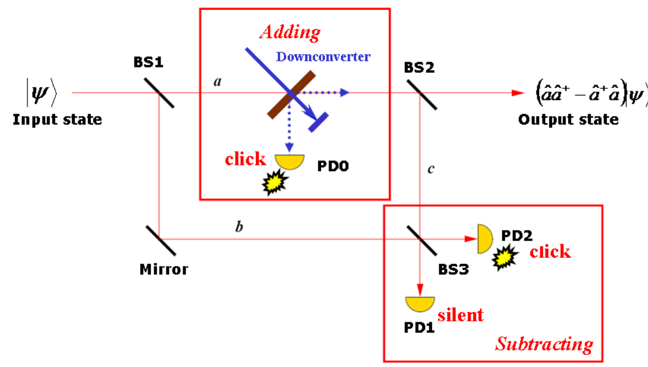

Fig. 2. Method for a proof of the bosonic commutation relation.[5] Beam splitter BS3 erases which-path information of the detected photon in order to coherently superpose two distinct operations.

야 한다. 이는 "서로 구별되는 작용들 간의 양자 중첩"(quantum superposition of distinct operations)으로 슈뢰딩거의 고양이 역설에서 고양이를 "죽이는" 작용과 "살려 두는" 작용을 결맞게 중첩시키는 것과 비교할 수 있다.[5,6] 이는 또한 임의의 작용을 양자적으로 중첩시켜서 빛의 양자적 성질을 제어한다는 점에서도 큰 의미를 가질 수 있다.

이러한 목적을 위해 Kim 등은 최근 광자 간섭계를 이용한 방법을 제안했다.[5] 그림 2의 광자 간섭계에 입사되는 빛은 먼저 투과율이 높은 빛 나누개(BS1)를 통과한 후 a 경로로 나오는 부분은 단일 광자를 더할 수 있는 장치를 통과하게 된다. 광자검출기 PD0에서 광자가 검출됨에 의해 단일 광자가 분명히 더해졌는지의 여부를 확인한다. 단일 광자를 더하는 부분을 통과한 후 a 경로의 빛은 투과율이 높은 또 다른 빛 나누개(BS2)를 통과하고 BS1에서 반사된 b 경로의 빛과 BS2에서 반사된 c의 경로의 빛이 50%의 반사율을 가진 빛 나누개(BS3)를 통과한 후 최종적으로 광자 검출기 PD1과 PD2에 도달하게 된다.

먼저 그림 2에서 입사 상태가 검출기들에 도달하기 직전에 거치는 BS3가 없다고 가정해 보자. 이 경우 PD2가 단일 광자를 검출하고 PD1가 아무 것도 검출하지 못할 경우 검출된 광자는 b의 경로에서 온 것이 분명하다. 따라서 광자가 먼저 제해진 후에 더해진 $a^\dagger a$의 작용이 입력 상태(input state)에 수행되게 된다. 반면에 광자검출기 PD1가 단일 광자를 검출하고 광자검출기 PD2가 광자를 검출하지 못한다면 검출된 광자는 c의 경로에서 온 것이므로 광자가 먼저 더해진 후에 제해진 $aa^\dagger$가 수행된 것으로 단정할 수 있다. 여기서 $a^\dagger a$의 수행과 $aa^\dagger$의 수행이라는 두 사건(event)을 중첩시키는 핵심적 역할을 하는 도구는 BS3이다. 50%의 반사율을 가진 빛 나누개 BS3는 광자가 검출기 B 혹은 C에서 검출되더라도 광자가 먼저 제해진 후에 더해졌는지, 아니면 더해진 후에 제해졌는지에 대한 정보를 지워 버린다. 이것은 마치 이중 슬릿 실험에서 경로에 대한 정보(which-path information)를 지워

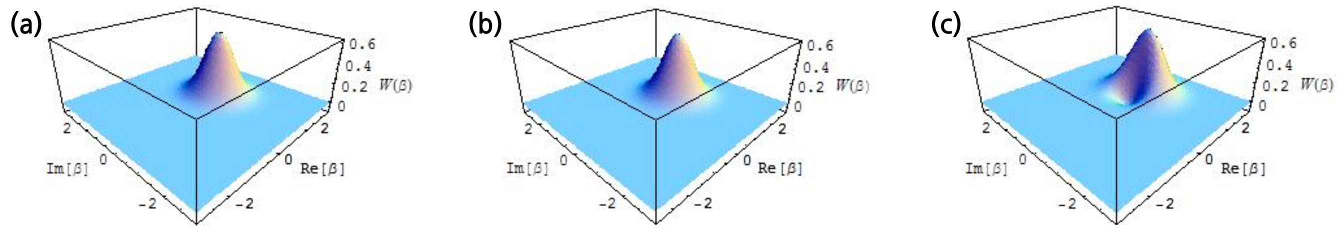

Fig. 3. (a) Coherent state used as an input state. (b) Output state when PD2 registers any photon(s). (c) Output state when PD1 registers any photon(s).

버리면 두 사건들이 양자 간섭을 일으키는 것과 같다. 즉 이 장치는 간섭계에 입력되는 임의의 광학적 상태에 “단일 광자를 더한 후에 빼는 작용”과 “단일 광자를 뺀 후에 더하는 작용”이 결맞게 중첩되도록 고안된 것이다.

보다 구체적인 계산[5]에 의하면 PD2에서 광자가 검출되고 PD1에서 아무 것도 검출되지 않을 경우 $aa^\dagger - a^\dagger a$의 작용이 구현될 것이다. 만일 보존 교환관계가 맞다면 교환자(commutator) $[a, a^\dagger]$가 1이므로 출력 상태는 입력 상태와 같은 상태가 될 것이다. 입력 상태와 출력 상태는 모두 호모다인 단층촬영 기법을 통해 재구성 및 비교가 가능하다. 이러한 방법을 통해서 교환자가 어떤 상수(K라고 하자)라는 것을 실험적으로 확인할 수 있다. 그러나 이것만 가지고는 K가 1이라는 것을 증명할 수는 없다. K가 정확히 어떤 상수인지를 구하기 위해서는 반대의 경우(PD1만 광자를 검출하는 경우)가 필요하다. 이 경우 $aa^\dagger + a^\dagger a$의 작용이 구현되며 입력 상태와는 다른 상태가 출력 상태로 나오게 될 것이다. 결맞음 상태를 포함한 많은 입력 상태의 경우 $aa^\dagger + a^\dagger a$의 작용은 입력된 고전적 상태를 강한 비고전성을 가지는 상태 - 위그너 함수에 분명한 음의 값(negative value)이 보이는 - 로 바꾸게 된다. 그런데 PD2에서만 광자가 검출되는 경우를 통해 교환자가 상수라는 것이 이미 증명되었다면 $aa^\dagger + a^\dagger a$는 $2a^\dagger a + K$로 바꾸어 쓸 수 있다. 그러면 PD2에서의 광자 검출을 통해 $aa^\dagger + a^\dagger a$를 구현하여 실험적으로 얻은 상태와 입력 상태에 $2a^\dagger a + K$를 적용한 상태를 비교하여 K를 결정하는 것이 가능하다. 이런 방법으로 보존 교환관계가 1이라는 것을 확인할 수 있다.

물론 실제 실험에서는 이상적인 상황과는 다른 몇 가지 요소를 고려할 필요가 있다. 먼저 그림 2의 BS1과 BS2는 투과율은 이상적인 결과를 위해서 높을수록 좋겠지만, 지나치게 높으면 성공 확률이 0에 가까워지게 되므로 실험이 불가능해진다. 즉 빛 나누개의 투과율이 1일 수는 없는데, 이 때문에 입력 상태가 BS1과 BS2를 거치면서 의도했던 바와는 달리 평균 광자 수가 약간 줄어들게 된다. 두 번째로 광자 검출기들이 가지는 기술적 한계가 실험 결과에 영향을 미칠 수 있다. 앞서 설명한 대로 현재 기술로는 여러 개의 광자가 검출되는 경우와 하나의 광자가 검출되는 경우를 구별하기 어려우며 측정 효율의 한계로 인해 입사광으로부터 들어온 광자를 놓칠 수도 있다. 그 밖에 광자가 전혀 들어오지 않았는데도 광자 검출 신호를 주는 경우가 존재하지만 이러한 경우의 확률은 앞의 경우에 비해 미미하므로 비교적 적은 영향을 미칠 것이라고 판단할 수 있다. 마지막으로 다운 컨버터(down converter)를 이용하여 만들어낸 광자 쌍은 광자 두 개만 포함된 이상적인 광자쌍이 아니라는 사실을 고려할 필요가 있다.

실제로 수행된 실험에서는 결맞음 상태 대신 평균 광자수가 0.9인 빛의 열 상태가 입력 상태로 사용되었다.[6] PD2에서만 광자를 검출되었을 경우 호모다인 단층촬영 기법을 통해 재구성된 출력 상태는 입력 상태에 대하여 99%의 높은 신뢰도를 보였다. 이러한 근거에 따라 보존 교환관계를 상수 K로 가정하고 PD1만 광자를 측정했을 때에 호모다인 단층촬영 기법을 통해 재구성된 상태와 입력 상태에 $2a^\dagger a + K$를 적용하여 계산한 상태를 비교하여 두 상태를 가장 정확하게 일치시키는 K의 값을 구했다. 최종적으로 구해진 보존 교환자의 값은 $K = 1.02 \pm 0.03$으로 오차범위 내에서 1이라는 것을 보일 수 있었다. 이러한 모든 결과는 이론적 예측과 잘 일치하며, 이를 통해 양자역학의 보존 교환 관계가 최초로 직접 검증되었다.

이상 설명한 이론적 제안[5]과 실험적 구현[6]은 보존 교환관계라는 양자 역학의 중요한 기본 관계식을 최초로 직접 검증한 결과일 뿐 아니라, 양자 연산자들로 표현되는 작용들의 중첩에 대한 구현의 첫 단계로도 의미 있는 결과라고 할 수 있다. 구체적으로 그림 2의 실험 장치에서 BS3의 위상과 투과율을 조절함으로 $aa^\dagger$과 $a^\dagger a$ 사이의 상대적 위상과 진폭의 비율을 조정하며 두 작용의 임의의 중첩을 구현할 수 있다. 또한 광자 하나를 제하고 더하는 작용뿐 아니라 여러 개의 광자들을 제하거나 더하는 작용 및 비선형 작용을 포함한 다양한 작용들의 중첩까지 고려할 수 있을 것이다. 이러한 일반화는 다양한 비고전적 빛의 생성과 제어 및 이를 통한 광학 기반 양자정보 기술의 진보에 크게 기여할 것으로 기대된다.